Записи лекций Ульянова В.В.

https://youtube.com/playlist?list=PLhe7c-LCgl4I18jAN4BWEJlSlfNSb_UjI

https://vk.com/zapisidebila

Лекции: Райгородский

https://www.youtube.com/playlist?list=PLthfp5exSWEr8tRK-Yf-i9aXgcFJ-O16d

Латыпова Аделина 216 гр

2022 - 2023 г.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. Конечные вероятностные пространства. Классическая вероятность, случай равновероятных элементарных исходов. Задача о разделе ставки. Примеры устойчивости частот. Аксиоматика А.Н.Колмогорова. Вероятностное пространство, сигма-алгебра событий, вероятность. Примеры вероятностных пространств. Свойства вероятности: вероятность пустого множества равна нулю, конечная аддитивность, теорема сложения, счетная полуаддитивность, монотонность, непрерывность по монотонным последовательностям, конечная аддитивность + непрерывность по неубывающим или по невозрастающим последовательностям влекут счетную аддитивность. Урновые схемы. Выборка с возвращением. Биномиальное распределение. Выборка без возвращения. Гипергеометрическое распределение. Условная вероятность. Попарная независимость и независимость в совокупности для множества событий. Пример Бернштейна. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Дискретные случайные величины. Индикатор события. Распределение дискретной случайной величины. Схема Бернулли. Математическое ожидание для дискретных случайных величин. Его свойства. Математическое ожидание функции от случайной величины. Пример случайной величины, не имеющей математического ожидания. Моменты и центральные моменты k-го порядка. Дисперсия, ее свойства. Математическое ожидание и дисперсия для биномиального распределения. Среднеквадратическое отклонение. Независимость в совокупности и попарная независимость дискретных случайных величин. Теорема о независимости двух функций от непересекающихся совокупностей независимых случайных величин. Мультипликативность математического ожидания. Ковариация, коэффициент корреляции, его свойства. Неравенства Маркова и Чебышева. Правило трех сигм. Теорема Чебышева (ЗБЧ). Теорема Бернулли. Пуассоновское распределение. Теорема Пуассона. Оценка близости биномиальных вероятностей к пуассоновским (без доказательства). Задача о конкуренции. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа (без доказательства). Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа. Общее определение вероятностного пространства. Сигма-алгебра, порожденная классом множеств. Борелевская сигма-алгебра. Теорема о единственности продолжения вероятности с алгебры на порожденную ею сигма-алгебру (без доказательства). Случайные величины как измеримые отображения. Функция распределения случайной величины. Ее свойства. Распределение случайной величины. Теорема о взаимно-однозначном соответствии между функциями распределения и вероятностными распределениями. Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотности распределений вероятностей, их свойства, включая многомерный случай. Нормальное и стандартное нормальное распределения. Случайный вектор, его распределение и функция распределения. Плотность случайного вектора и его компонент. Нахождение маргинальных распределений по совместному распределению. Геометрические вероятности. Многомерное равномерное распределение. Сигма-алгебра, порожденная случайной величиной. Независимость случайных величин в терминах функции распределения и в терминах совместной плотности в случае ее существования. Формула свертки. Лемма Бореля-Кантелли. Операции над случайными величинами, не выводящие из класса случайных величин. Виды сходимости последовательностей случайных величин: сходимость по вероятности, сходимость почти всюду, сходимость в среднем. Связь между ними. Характеризационное свойство сходимости почти всюду. Определение математического ожидания в общем случае. Свойства математических ожиданий. Теорема о предельном переходе под знаком математического ожидания (без доказательства). Неравенство Колмогорова. Усиленный закон больших чисел Колмогорова. Метод Монте-Карло. Производящие функции. Восстановление распределения по производящей функции. Производящая функция суммы случайного числа случайных величин. Задаче о числе животных. Задача о вырождении фамилий. Теорема о вероятности вырождения. Характеристические функции. Их свойства: равномерная непрерывность, мультипликативность для сумм независимых случайных величин, k-кратная дифференцируемость при существовании момента порядка k. Формула обращения (без доказательства). Теорема о взаимнооднозначном соответствии между функциями распределения и характеристическими функциями. Слабая сходимость последовательности случайных величин. Прямая и обратная теоремы о непрерывном соответствии между характеристическими функциями и соответствующими вероятностными распределениями. Первая (с доказательством) и вторая (без доказательства) теоремы Хелли. Закон больших чисел в форме Хинчина. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин. ЦПТ для разнораспределенных случайных величин (без доказательства). Условные математические ожидания, условные распределения в случае дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Свойства условных математических ожиданий.

Лекция № 14 (Т. Лебега)

Лекция №1

Пусть есть машина, движущаяся со скоростью v в течении времени t

$$\left.\begin{matrix} v \\ t \end{matrix}\right] \text{набор условий} \underset{\text{однозначно}}{\Rightarrow} S = v \cdot t$$

Пусть есть некое кол-во средств M, которые мы можем вложить на год

$$\begin{matrix} M \\ +\text{акц} \end{matrix} \left] \begin{matrix} \to 0 & p_1 \\ \to M & p_2 \\ \to 2M & p_3 \end{matrix} \right.$$

Различные результаты могут быть с разными вероятностями

- Прохоров, Пономаренко „Лекции по теории вероятностей и математической статистике"
- Ширяев „Вероятность" ← 1 том
- Бородин „Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики" ← коротко, + задачи
- Феллер „Введение в теорию вероятностей и ее приложения" ← 1 том (длинно) зеленое — последнее издание
- Гнеденко „Курс теории вероятностей"
- Секей „Парадоксы в теории вероятностей"

- Возникновение: лето 1654 года
- XVIII начало ЗБЧ
- XVIII - XIX начало ЦПТ Муавра - Лапласа
- 1933 год - аксиоматика Колмогорова

Основной объект теории вероятностей:

Вероятностное пространство - тройка : $(\Omega, \underset{F}{A}, P)$

Ω: пространство элемент. исходов ← описание может быть разным

A: совокупность подмножеств из Ω / σ-алгебра подмн-в Ω
событий

1. $\Omega \in A$
2. Если $B \in A$, то $B^c \in A$ ($B^c = \overline{B}$)
3. Если $B_1, B_2, \ldots \in A$, то $\bigcup\limits_1^\infty B_i \in A$

P: $A \to [0,1]$

1. $P(B) \in [0,1]$, $B \in A$
2. $P(\Omega) = 1$ ← достоверное событие
3. P явл. σ-аддит. функцией → $\forall \{B_i\} \subset A$; $B_i B_j = \varnothing$ ($B_i B_j = B_i \cap B_j$), то $P(\bigcup\limits_1^\infty B_i) = \sum\limits_1^\infty P(B_i)$

$\varnothing$ - невозможное событие

НО! Если вероятность события 0, то не значит, что оно невозможное

Если вероятность события 1, то не значит, что оно достоверное

Пример: $\exists$ есть доска. Вероятность попасть в среднюю часть доски: площадь ср. части делить на площадь доски. Вероятность попасть в точку с рациональными координатами $= 0$

— 1654 Появление классической вероятности

Задача о разделе ставки

Два игрока: Аня и Боря. Игроки с равными силами, за победу в раунде игрок получает очко. Игра продолжается до 6 побед.
Победитель получает приз.

Но игра была приостановлена со счетом 5:3 в пользу Ани. Как справедливо разделить приз?

Надо разделить приз в том соотношении, как соотносятся шансы победить, если бы игра была продолжена

А
БА
ББА
БББ

} не равновозможны

будем играть ровно 3 партии

А < ААА, АБА, ААБ, АББ

БА < БАА, БАБ

$\Rightarrow$ 7 исходов = выигрыш Ани
1 исход = выигрыш Бори

Классическая вероятность:

1. Ω - конечно $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$
2. Все элемент. исходы ω_i равновозможны
3. Если событие $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}$

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

кол-во элементов

Лекция №2

Согласно аксиоматике Колмогорова

Основное понятие: вероятностное пространство

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$P: \mathcal{A} \to [0, 1]$

функция задана на $\mathcal{A}$

Св-ва вероятностей

1) $P(\varnothing) = 0$ — невозможное событие

Док-во: $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots$

по 3 аксиоме

$$P(\Omega) = 1 = P(\Omega) + \sum_1^\infty P(\varnothing)$$

$$\Rightarrow P(\varnothing) = 0$$

2) Конечная аддитивность

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ — события; $A_i A_j = \varnothing$ — попарно несовместны

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_1^n A_i\right) = \sum_1^n P(A_i)$$

Док-во:

$$\bigcup_1^n A_i = \bigcup_1^n A_i \cup \varnothing \cup \varnothing \ldots$$

по 3 аксиоме

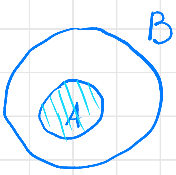
$$P\left(\bigcup_1^n A_i\right) = \sum_1^n P(A_i) + \underbrace{P(\varnothing) + P(\varnothing) + \ldots}_{0}$$

3) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$

наступление A влечет наступление B

$$\Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Док-во:



$$B = A \cup (B \setminus A)$$

по 2 св-ву:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

т.к. $P(B \setminus A) \geq 0$

4) Св-во непрерывности вероятности по монотонным последовательностям

неубыв.

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$

события

невозр

$B_1 \supset B_2 \supset \ldots$

события

$\lim A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$\lim B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$

$\Downarrow$

① $P(\lim A_i) = \lim P(A_i)$

② $P(\lim B_i) = \lim P(B_i)$

$C_1, C_2, \ldots$ ← последов. множ

$\overline{\lim}\, C_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq k} C_n$ ← событие происходит <=> происходит бесконечное число событий C_i

$\underline{\lim}\, C_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq k} C_n$ ← событие происходит <=> происходят все события C_i, начиная с некоторого номера

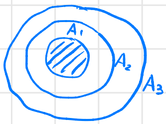
Док-во: ① $\lim A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Построим $\{D_i\}$ $D_1 = A_1$ $D_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, D_k = A_k \setminus A_{k-1}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i}^{\infty} D_i$; $D_i D_j = \varnothing$

$P\left(\bigcup_i^{\infty} D_i\right) = \sum_1^{\infty} P(D_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n P(D_i) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_i^n D_i\right)$

$\bigcup_i^n D_i = A_n$ (по постр.)



$\parallel$

$P\left(\bigcup_i^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$

5) Св-во счетной полуаддитивности

Пусть $A_1, A_2, \ldots$ - события

$P\left(\bigcup_1^{\infty} A_i\right) \leq \sum_1^{\infty} P(A_i)$

Док-во: Построим $T_1 = A_1$; $T_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, T_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)$

=> $\bigcup_1^{\infty} A_i = \bigcup_1^{\infty} T_k$, $T_i T_j = \varnothing$, $T_k \subset A_k$

=> $P\left(\bigcup_1^{\infty} A_i\right) = \sum_1^{\infty} P(T_k) \leq \sum_1^{\infty} P(A_k)$

по 3 св-ву монот.

по акс. счетной аддит.

Урновые схемы

Есть урна, в ней шары

1 схема: Извлечение с возвращением

Из урны вытаскиваем шар, смотрим какого цвета шар и кладем шар обратно и повторяем эксперимент

В урне шары: m_1 черных, m_2 белых $\quad m_1 + m_2 = m$

n извлечений

$A_k = \{k$ раз извлекали черный шар$\}$

Как представлять элементарный исход?

Предложение 1:

- Последовательность цветов, которая появлялась

  1 ЧЧЧБЧ
  2 БББББ

  Равновозможны?

Если урна (ББЧ), то элемент. исход 2 более вероятен
=> классическая вероятность не работает

Предложение 2: занумеровать шары

- Последовательность появившихся номеров

$\omega = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$

кол-во → $\#\Omega = m^n$

$\{\underbrace{i_1, \ldots, i_k}_{Ч}, \underbrace{i_{k+1}, \ldots, i_n}_{Б}\}$ – этот элемент. исход входит в А

И любой элемент. исход с таким набором шаров тоже входит в А

$$\# \{\underbrace{i_1, \dots, i_k}_{Ч}, \underbrace{i_{k+1}, \dots, i_n}_{Б}\} = m_1^k \cdot m_2^{n-k}$$

(кол-во послед. такого типа

$$\# A_k = C_n^k m_1^k \cdot m_2^{n-k} \qquad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\Rightarrow P(A_k) = \underbrace{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{Бином. распред.}}, \text{ где } p = \frac{m_1}{m} \text{ — доля черных шаров}$$

2 схема: Извлечение без возвращения

Из урны вытаскиваем шар, смотрим какого цвета шар и откладываем в сторону и повторяем экспери-мент

$$\omega = \{i_1 i_2 \dots i_n\} \qquad \boxed{k \le \min(n, m_1)}$$

$$\# \Omega = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)$$

$$\# \{\underbrace{i_1, \dots, i_k}_{Ч}, \underbrace{i_{k+1}, \dots, i_n}_{Б}\} = m_1 (m_1 - 1) \dots (m_1 - k + 1) \times m_2 (m_2 - 1) \dots (m_2 - (n-k)+1)$$

$$\# A_k = C_n^k \, m_1 (m_1 - 1) \dots (m_1 - k + 1) \times m_2 (m_2 - 1) \dots (m_2 - (n-k)+1)$$

$$P(A_k) = \frac{\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}}{\binom{m}{n}}$$ Гипергеометрическое распределение

Пример: В каком-то лесу есть какое-то кол-во жи-вотных. Мы хотим оценить сколько там животных. Выловим какое-то кол-во животных, каким-то образом пометить и отпустить. А затем снова ловить ка-кое-то количество.

Можно ли по тому, что мы поймали оценить сколько там животных?

Пусть m – неизвестное кол-во животных
m_1 – отловили, пометили, отпустили
Вновь поймали n животных
среди которых оказалось k мечен.

$m = m(m_1, n, k)$

Условные вероятности

Пример: Пусть вы живете в дачном поселке, и у вас появилась новая соседская семья. В семье 2-е детей. Может быть: мальчик, мальчик; девочка, девочка; девочка, мальчик. Вдруг вы видите, что навстречу вам идет эта семья с одним ребенком. И этот ребенок – мальчик. Какова вероятность, что второй ребенок в этой семье мальчик?

Пример: Аня и Боря должны сдать экзамен. Готовятся вместе. На экзамене 25 билетов, они из 25 билетов знают 20. Наступает день экзамена. Должен ли Боря пустить Аню вперед и сдавать вторым или наоборот? Он хочет сдавать первым. Какой вариант для Ани предпочтительнее?

$A_1 \Rightarrow P(A_1) = \frac{20}{25}$

$B_1 A_2 \Rightarrow P(A_2) = P((B_1 \cup \overline{B}_1) A_2) = P(B_1 A_2 \cup \overline{B}_1 A_2) = P(B_1 A_2) + P(\overline{B}_1 A_2)$

$P(B_1 A_2) = P(B_1) \cdot P(A_2 | B_1) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24}$

$+$

$P(\overline{B}_1 A_2) = P(\overline{B}_1) \cdot P(A_2 | \overline{B}_1) = \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24}$

$\parallel$

$\frac{20 \cdot 24}{25 \cdot 24} = \frac{20}{25} \Rightarrow$ Без разницы

Опр: Пусть событие $B : P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии, что событие B произошло называется вероятность совместного события A и B на вероятность события B

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$\Rightarrow \quad P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$ Следствие

Лекция №3

Теорема: Если на $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ из тройки $(\Omega, \mathcal{A}, P)$) определена функция множеств $P_1(A) = P(A|B)$, то $(\Omega, \mathcal{A}, P_1)$ – тоже вероятностное пространство
← фиксировано

Док-во:

Проверим 3 аксиомы из аксиоматики Колмогорова:
1) Неотрицательность очевидна
2) $P_1(\Omega) = 1$

$$P_1(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) Св-во счетной аддитивности:

$$\{A_i\} \subset \mathcal{A}, \quad A_i A_j = \varnothing$$

$$\begin{array}{ccc} P_1\left(\bigcup\limits_1^{\infty} A_i\right) & = & \sum\limits_1^{\infty} P_1(A_i) \\ \| & & \| \\ \dfrac{P\left(\bigcup\limits_1^{\infty} A_i B\right)}{P(B)} & = & \dfrac{\sum\limits_1^{\infty} P(A_i B)}{P(B)} \end{array}$$

Формула полной вероятности

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}$: $A_i A_j = \varnothing$; $\bigcup\limits_1^n A_i = \Omega$ (Замечание: n можно менять на ∞)

$$P(B) = \sum_1^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Док-во:

$$P(B) = P(B\Omega) = P\left(B \cap \bigcup_1^n A_i\right) = P\left(\bigcup_1^n B A_i\right) = \sum_1^n P(BA_i)$$

Формула Байеса (Bayes)

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A} : A_iA_j = \varnothing ; \ \bigcup_1^n A_i = \Omega$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{\sum_1^n P(A_k)P(B|A_k)}$$

+ формула полной вероятности

Док-во: $P(B)>0, \ P(A)>0$

$$P(AB) = P(B)\cdot \boxed{P(A|B)} = P(A)\cdot P(B|A)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A} : A_iA_j = \varnothing ; \ \bigcup_1^n A_i = \Omega$

$\{P(A_i)\}_{i=1}^{n}$ – совокупность априорных вероятностей

Произошло событие B.

$\{P(A_i|B)\}_{i=1}^{n}$ – совокупность апостериорных вероятностей

Пример: Человек обследуется. Он либо болен, либо здоров. Результат обследования показывает, что человек болен. Какова вероятность, что он здоров?

Б – болен
З – здоров

"Б" – назван больным } по результатам
"З" – назван здоровым } обследования

$P(З|"Б")$ – ?

$$P(З|"Б") = \frac{P(З)\cdot P("Б"|З)}{P(З)\cdot \underbrace{P("Б"|З)}_{\alpha} + \underbrace{P(Б)}_{\gamma}\underbrace{P("Б"|Б)}_{1-\beta}}$$

$1-\beta = 0{,}9$

$\gamma = 0{,}001$ $\qquad P(З|"Б") = 0{,}92$

$\alpha = 0{,}01$

Независимость событий

Опр: События A и B называются независимыми, если

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Замеч.: Если одно из событий A или B невозможно или достоверно, то события A и B независимы

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Сравним

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$\Rightarrow$ Если события A и B независимы, то $\begin{matrix} P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{matrix}$

Опр: (Независимость в совокупности)

Пусть есть набор событий A_i:

$\{A_i\}_{i \in I}$, где совокупность индексов I - конечно или счетно

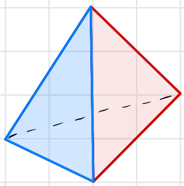
Эта совокупность событий называется независимой в совокупности, если для любого конечного множества J подмножества индексов I ($J \subset I$)

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Пример: A_1, A_2, A_3 - незав. в совокупности, если

1) $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$
2) $P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j) \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \ i \neq j$

Пример Бернштейна: 3 события, которые независимы попарно, но не являются независимыми в совокупности



Правильная пирамида:
1 грань - белая
2 грань - красная
3 грань - синяя
4 грань - в полоску: белая, красная, синяя

Пирамида случайным образом бросается. Равновозможно приземляется на одну из граней

"Б" - событие: на грани, на которую упала пирамида есть белый цвет

"С" - событие: на грани, на которую упала пирамида есть синий цвет

"К" - событие: на грани, на которую упала пирамида есть красный цвет

$P(\text{"Б"}) = P(\text{"С"}) = P(\text{"К"}) = \frac{1}{2}$

$P(\text{"Б"} \cap \text{"С"}) = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ попарная независимость есть, независимости в совокупности нет

Случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - вероятностное пространство

Опр: Случайной величиной X на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется <u>измеримое</u> отображение из Ω в $\mathbb{R}$

Опр: Отображение $X : \Omega \to \mathbb{R}$ называется измеримым, если $\forall$ борелевского мн-ва $B \subset \mathbb{R}$ $X^{-1}(B)$ (прообраз B) содержится в $\mathcal{A}$

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

$P(X \in B)$

Опр: Борелевское мн-во - элемент борелевской σ-алгебры

Опр: Борелевская σ-алгебра - наименьшая σ-алгебра, содержащая все $\underbrace{\text{открытые подмн-ва } \mathbb{R} \text{ (прямой)}}_{\text{открытые интервалы}}$

$\mathcal{B}$ - борелевская σ-алгебра

Пример: $\{0\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)}_{\text{открытый интервал}}$ - Борелевская σ-алгебра

точка

Будем далее считать, что:

1. Пространство Ω не более чем счетно
2. Класс событий $\mathcal{A}$ - все подмн-ва Ω

$\Rightarrow$ С измеримостью проблем нет

Примеры: Случайные величины:

1. Константа: $\forall \omega$ $X(\omega)$ - случ. величина
2. Индикатор события A

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$A \in \mathcal{A}$

3. Распределение Бернулли

Опр: Случайная величина X имеет распределение Бернулли с параметром p, если совокупность знач. $0, 1$, которые принимаются с вероятностями $1-p, p$ соотв.

Опр: Под распределением случ. велич. X понимается 2 совокупности:

1. Совокупность значений $a_1, a_2, \ldots$
2. Совокупность соотв вер-ней $p_1, p_2, \ldots$

$$p_i = P(X = a_i)$$

Пример: X, Y - случ. величины $X \overset{d}{=} Y$ - с одинак. распр.

$\Rightarrow X(\omega) = Y(\omega) \ \forall \omega$? Нет

одна и та же функция ?

пример

$\Omega = \{Г, Р\}$

$$X = \mathbb{1}_Г = \begin{cases} 1, & \text{если выпал } Г \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$Y = \mathbb{1}_Р, \quad P(Y = 1) = \frac{1}{2}$$

Схема Бернулли

Пусть у нас проводится некий эксперимент случайный, результатом которого может быть наступление или не наступление некого события A

Предположим, что в результате эксперимента случайное событие A наступает с вероятностью p. Проводится n таких испытаний (таких случайных экспериментов) Обозначим через X кол-во наступлений события A в n экспериментах.

$X \in \{0, \ldots, n\} \leftarrow$ совокупность значений

X - кол-во наступлений события A $(0, 1, 2, \ldots, n)$

Урновая схема с возвращением:

$P(A) = p$

m_1 - черных

m_2 - белых

$m = m_1 + m_2$

n - извлечений

$$P(A_k) = \binom{n}{k}\left(\frac{m_1}{m}\right)^k\left(1 - \frac{m_1}{m}\right)^{n-k}$$

k раз появ. черный

$\frac{m_1}{m} = p$ ← извл. черный при 1 извлечении

$$\underset{k=\overline{0,n}}{P(X=k)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \mathrm{Binom}(n, p)$$

биномиальное распр. с параметрами n и p

Лекция №4

Пример: Есть закрытая дверь, у охранника есть связка ключей, он наугад выбирает из этой связки ключ и пробует открыть дверь. Но в силу своего состояния (пьяный, старый) он не откладывает этот ключ, а сбрасывает в связку, и следующее испытание это повторение первого испытания.

Сколько попыток он должен совершить до того, как дверь откроется?

Пусть кол-во попыток: X В связке n ключей

$k = 1, 2, 3, \dots$ ← значения X

$P(X=1) = \frac{1}{n}$

$P(X=2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$

первая попытка неудачная

← событие

$A_i = \{i\text{-я попытка удачна}\}$

$\Omega = \{A_1, \bar{A}_1 A_2, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3, \dots\}$

Если обозначить $\frac{1}{n} = p = P(A)$

$P(X=1) = p$, $P(X=2) = (1-p) \cdot p$ ... $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$

Геометрическое распределение с параметром p

Моменты случайных величин

Пример: В аудитории сидят 50 студентов. У каждого есть набор параметров: рост, вес, цвет глаз и т.д. Если попросить наугад человека назвать эти параметры - это случайная величина. Совокупность из 50 человек можно рассматривать, как некую случайную величину, а вот значения роста каждого студента это есть набор значений этой случайной величины.

Если мы хотим посчитать средний рост этих 50 человек, мы сложим значения роста каждого и разделим на 50, на общее число человек.

Пусть есть люди одинакового роста, тогда можно суммировать не все 50 значений.

$x_1, \dots, x_{50}$ – рост 1-го, 2-го, ..., 50-го

$a_1 < a_2 < \dots < a_k$ - различные значения роста

$n_1, \dots, n_k$ – кол-во челов. соотв. роста

кол-во чел. с ростом a_1 | кол-во чел. с ростом a_2 | $n = n_1 + \dots + n_k$

$\overline{X}$ - средний рост

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot n_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{n_i}{n}$$

Напоминание: Считаем, что пространство Ω - дискретно, т.е. не более чем счетно, $\mathcal{A}$ - все подмножества Ω

Опр: Математическим ожиданием (средним) случ. вел. X называется велич. $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$, если он сходится абсол.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Обозн.: $MX = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$

$\mathbb{E}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$

Свойства математических ожиданий

1. $\mathbb{E}C = C$ (математическое ожидание константы есть константа)
2. $\mathbb{E}(cX) = c\,\mathbb{E}X$ (константу можно вынести)
3. Если $\exists\ \mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$, то $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ (из св-в абс. сход. рядов)
4. Если случ. величина X принимает значения $a_1, a_2, \dots$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots$

   $p_i = P(X = a_i)$ формула для мат. ожид. дискретных вел.

   то $\mathbb{E}X = \sum_{1}^{\infty} a_i p_i$, если $\mathbb{E}X$ существует

Док-во $\mathbb{E}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) \ominus$

$$\boxed{A_i = \{\omega : X(\omega) = a_i\},\ \bigcup_1^\infty A_i = \Omega \quad A_i A_j = \varnothing}$$

$\ominus$ {т.к. ряд сход абсол., то можем переставлять члены ряда} $= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\omega\in A_i} X(\omega)P(\omega) =$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{\omega\in A_i} P(\omega) = \sum_i a_i p_i$$

Пример: (Петербургский парадокс) (Пример не сущ. мат. ожид.)

Допустим, Боря предлагает Ане поиграть в следующую игру: бросается правильная монета до первого появления герба. Если герб появляется при первом бросании, то Боря готов заплатить Ане 2 рубля. Если герб появляется впервые при 2-м бросании, то Боря платит 2^2, при третьем: 2^3 и т.д. Но Боря любит справедливые игры: он готов платить, но за участие в игре он просит заплатить средний выигрыш. А чему равен средний выигрыш?

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 \to \infty$$

Задача появилась в 18 веке. И тогда не могли понять: 1000 рублей это много? Не очень. Но с какой вероятностью Аня получает выигрыш более 1000?

X - выигрыш Ани $\quad X: \ 2 \quad 2^2 \quad 2^3 \ \ldots$

с вероятностями: $\quad 2^{-1} \quad 2^{-2} \quad 2^{-3} \ \ldots$

$\mathbb{E}X = \underbrace{2\cdot 2^{-1} + 2^2 \cdot 2^{-2} + \ldots}_{+\infty}$ => не существует конечного мат. ожид.

$$P(X > 1000) = \sum_{k\geq 10}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^9}$$

Если Аня соглашается играть в эту игру, то она может получить крупный выигрыш, но вероятность этого выигрыша она очень мала

Ценность выигрыша уменьшается с его увеличением

Даниил Бернулли (функция полезности)
Представьте, что Аня миллиардер. Выиграть 100000 для нее интересно? Или настолько не интересно, если Аня живет от зарплаты до зарплаты? В разных ситуациях это разные 100000. (Примерная суть функции полезности)

Вывод: не всегда существует мат. ожидание

Пример: Посчитаем мат. ожидание случ. велич. X
Пусть X имеет биномиальное распределение с параметрами n, p. Случайная величина X имеет конечное число значений => в св-ве 4 у нас будет конечное число слагаемых => мат. ожидание существует

> 4. Если случ. величина X принимает значения $a_1, a_2, \dots$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots$
> $p_i = P(X = a_i)$ — формула для мат. ожид. дискретных вел.
> то $\mathbb{E}X = \sum_{1}^{\infty} a_i p_i$, если $\mathbb{E}X$ существует

<u>Найти мат. ожидание</u>

X - число наступлений события A в схеме Бернулли
=> $X \sim Binom(n, p)$

индикатор наступления события A в i-м испытании

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании наступило } A \\ 0 \end{cases}$$

$$P(Y_i = 1) = p, \quad i = 1, \dots, n$$

$$X = Y_1 + \dots + Y_n$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{1}^{n} \mathbb{E}Y_i = \sum_{1}^{n} p = np$$

по 3-му св-ву

> 3. Если $\exists\ \mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$, то $E(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

=> $\boxed{\mathbb{E}X = np}$

Свойства математических ожиданий (продолжение)

5. Пусть $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелевская функция и $\mathbb{E}g(x)$ сущ.
Тогда $\mathbb{E}g(x) = \sum_{1}^{\infty} g(a_i)p_i$ (Док-во аналогично 4 св-ву)

Пример: Пусть нам предложили играть в игру с „нулевой суммой".

1 вариант игры:
Бросается правильная монета: если выпадает герб, нам дают 1000, если решка, то мы платим 1000

2 вариант игры:
То же самое, но 1000 заменяется на 100000

В какую игру будем играть?

Пусть X_1 - выигрыш в 1-ой игре
X_2 - выигрыш во 2-ой игре

$$X_1 = \begin{cases} 10^3 \\ -10^3 \end{cases} \text{ с вероятностями } \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \qquad \mathbb{E}X_1 = 0$$

$$X_2 = \begin{cases} 10^5 \\ -10^5 \end{cases} \text{ с вероятностями } \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \qquad \mathbb{E}X_2 = 0$$

Мат. ожидания одинаковые, но есть то, что отличает эти игры: разброс относительно мат. ожидания: ± 1000 или ± 100000

=> Вводят новую величину:

т.к. нас не интересует знак

$$DX = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]$$ ← среднее квадратичное отклонение случ. величины от ее мат. ожид.

Эта величина называется **дисперсия**

Свойства дисперсии:

1. $DX \geqslant 0$
2. $Dc = 0$
3. $D(cX) = c^2 DX$
4. $D(X+Y) = \mathbb{E}(\underbrace{X-\mathbb{E}X}_{a} + \underbrace{Y-\mathbb{E}Y}_{b})^2 = \{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\} =$

$= \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 + 2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)] + \mathbb{E}(Y-\mathbb{E}Y)^2 =$

$= DX + \underbrace{2\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]}_{\text{коварiация } X \text{ и } Y} + DY$

$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)]$

Опр: Момент порядка k: $\mathbb{E}X^k = \sum_{\omega\in\Omega} X^k(\omega)P(\omega)$

Опр: Центральный момент порядка k: $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^k$

Пусть $\exists\, \mathbb{E}X^k$, $k \geqq m$. Сущ ли $\mathbb{E}X^m$?

Лекция №5

Опр: Случ. велич. X, Y независимы:
$\forall i, j \quad P(X = a_i, Y = b_j) = P(X = a_i) \cdot P(Y = b_j)$

Опр: $X_1, X_2, \ldots$ независимы в совокупности, если $\forall$ конечное подмн-во случ. велич. явл независ. в совок.

Опр: Случ. вел. $X_1, \ldots, X_n$ независимы в совокупности, если для $\forall$ борел мн-в $B_1, \ldots, B_n$:
$$P\left(\bigcap_1^n (X_i \in B_i)\right) = \prod_1^n P(X_i \in B_i)$$

Утв: Пусть $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_k$ — случ. вел. независим. в совок. и $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ измер.
Тогда $f(X_1, \ldots, X_n)$ и $g(Y_1, \ldots, Y_k)$ — независ. случ. велич

Свойства математических ожиданий (продолжение)

6. Если $\exists\, \mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$, и X, Y независ., то $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Док-во: $\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$; $A_i = \{\omega : X(\omega) = a_i\}$ $B_j = \{\omega : Y(\omega) = b_j\}$

$$\mathbb{E}XY = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Y(\omega) P(\omega) = \sum_{i,j} \sum_{\omega \in A_i \cap B_j} X(\omega) Y(\omega) P(\omega) =$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j P(A_i B_j) = \sum_{i,j} a_i b_j P(X = a_i) \cdot P(Y = b_j) = \left(\sum_i a_i P(X = a_i)\right)\left(\sum_j b_j P(Y = b_j)\right) =$$

независ. X, Y

$$= \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$$

Следствие: $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = 0$, если X, Y независ.

Опр: Случайные величины X, Y называются некоррелированными, если $\rho = 0$

ρ — коэффициент корреляции $\qquad \rho = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X \cdot \mathbb{D}Y}}$

Замечание: Из независимости сл. в. X, Y следует некоррелированность (следствие из св-ва 6 + опр.)

!НО! обратное неверно

Пример: Пусть случ. вел. X принимает значения $1; 0; -1$ с вероятностями $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$

$$X = \begin{cases} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{4} \end{cases}$$ Рассмотрим случ вел. $$Y = X^2 = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P(X=0, Y=1) = 0 \neq P(X=0) \cdot P(Y=1)$$

$\Rightarrow$ случ. вел. X, Y не являются независимыми (противоречие определению)

$\Rightarrow$ они зависимы

Но $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X^3 = 0$, $\mathbb{E}X = 0$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = 0$

$\Rightarrow$ $cov(X, Y) = 0$ $\Rightarrow$ случ. вел. некоррел.

А всегда ли X и X^2 зависимы? Нет

Пример: $$X = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P(X=1, X^2=1) = P(X=1) = \frac{1}{2} = P(X=1) \cdot P(X^2=1) = \frac{1}{2} \cdot 1$$

$X^2 \equiv 1$

$$P(X=-1, X^2=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2} = P(X=-1) \cdot P(X^2=1) = \frac{1}{2} \cdot 1$$

Коэффициент корреляции:

Коэффициент корреляции выступает как мера (характеристика) зависимости случайных величин X, Y !НО! линейной

Св-ва коэффициента корреляции:

1. Если X, Y независимы, то $\rho = 0$

2. $|\rho| \le 1$

> Коэффициент корреляции инвариантен относительно изменения масштаба:
> $$\begin{matrix} X \to cX, & c>0 \\ Y \to dY, & d>0 \end{matrix} \Rightarrow \rho_{X,Y} = \rho_{cX,dY}$$

Док-во: Пусть $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ *

Рассмотрим случ. вел. $Y - aX$, $a \in \mathbb{R}$

$$0 \le D(Y-aX) = \mathbb{E}(Y-aX)^2 = \mathbb{E}(Y^2 - 2YaX + a^2X^2) =$$
$$= \underset{D(Y)}{\mathbb{E}(Y^2)} - \underset{2a\cdot cov(X,Y)}{\mathbb{E}(2YaX)} + \underset{a^2 D(X)}{\mathbb{E}(a^2X^2)} = \underbrace{D(Y) - 2a\cdot cov(X,Y) + a^2 D(X)}_{\text{квадратный трехчлен относительно } a}$$

$$0 \le D(Y) - 2a\cdot cov(X,Y) + a^2 D(X) \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D} \le 0$$

($\mathcal{D}$ — дискриминант)

$$\mathcal{D} = 4cov^2(X,Y) - D(X)\cdot D(Y)\cdot 4 \le 0$$
$$\Rightarrow cov^2(X,Y) - D(X)\cdot D(Y) \le 0$$
$$\Rightarrow \frac{|cov(X,Y)|}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}} \le 1 \Rightarrow |\rho| \le 1$$

3. Если $|\rho| = 1$, то найдутся $a, b \in \mathbb{R}$: $Y = aX + b$ п.н.

(т.е. линейная зависимость)

Док-во: Из док-ва св-ва 2 вытекает, что если $|\rho| = 1$, то
$$D(Y-aX) = \mathbb{E}(Y-aX)^2 = 0$$
$$\Rightarrow Y - aX = 0 \quad \text{п.н.}$$
$\Rightarrow$ при некотором a: $Y = aX$ — может появиться константа b в этом случае

> почти наверное (п.н.)
> почти всюду (п.в.)
> с вероятностью 1 (с вер. 1)

* Если $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ не выполнено, то от случ. велич. X и Y переходим к центрированным случ. велич.
$$\begin{matrix} X' = X - \mathbb{E}X \\ Y' = Y - \mathbb{E}Y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mathbb{E}X' = 0 \\ \mathbb{E}Y' = 0 \end{matrix}$$
И все рассуждения повторяем для X', Y'

Пример: Пусть есть случ. велич. X со значениями от -100 до 100 с равными вероятностями

$$X = \begin{cases} 100 & \frac{1}{201} \\ \dots & \\ -99 & \frac{1}{201} \\ -100 & \frac{1}{201} \end{cases}$$

Промоделируем эту случ. велич.: Пусть у нас в урне есть 201 шарик с номерами от -100 до 100 и мы случайным образом выбираем шарик и смотрим какое число появилось. Вытаскивали много раз: получили некую выборку. (выбор с возвращ.)

n раз вытащили $\to$ появился набор значений

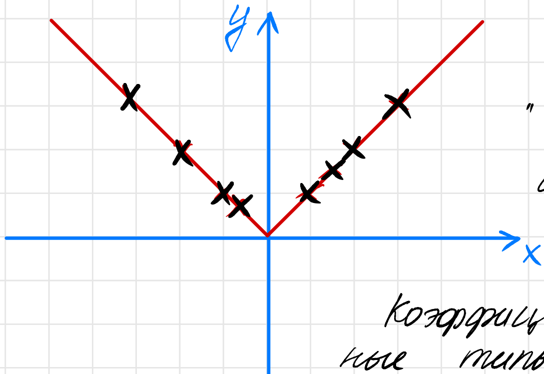
Строим соотв. набор для $Y = |X|$
Получается совокупность пар:

(x_1, y_1), где x_1 – номер шарика, кот. мы вытащили из урны первым
$y_1 = |x_1|$

$\dots$

(x_n, y_n)

Нарисуем эти точки в координатах x, y



Все точки лежат на „уголке"

Случ. величины X, Y – зависимы
но коэф. кор. $= 0$

Коэффициент корреляции сложные типы зависимости не улавливает

Неравенство Маркова

Пусть случ. велич. $X \geqslant 0$ и $\exists\, \mathbb{E}X$

Для $\forall\, a > 0$

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}X}{a}$$

Док-во:

$$1 = \mathbb{1}_A + \underbrace{\mathbb{1}_{A^c}}_{\notin A} \qquad \mathbb{E}X = \mathbb{E}X \cdot 1$$

$$A = \{\omega : X(\omega) \geqslant a\}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A \\ 0 \end{cases}}$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X \cdot (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}) \geqslant \mathbb{E}X \cdot \mathbb{1}_A \geqslant a\,\mathbb{E}\,\mathbb{1}_A = a \cdot P(A)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbb{E}X}{a} \geqslant P(A)$$

Неравенство Чебышева

Пусть у случ вел. X $\exists\, DX$

Тогда для $\forall\, \varepsilon > 0$

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad \text{или} \quad P(|X - \mathbb{E}X| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Док-во: Положим $Y = |X - \mathbb{E}X| \geqslant 0$

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geqslant \varepsilon) \equiv P(Y^2 \geqslant \varepsilon^2)$$

Далее применяем неравенство Маркова, где $X = Y^2$, $a = \varepsilon^2$ $\quad \mathbb{E}X = \mathbb{E}Y^2 = DX$

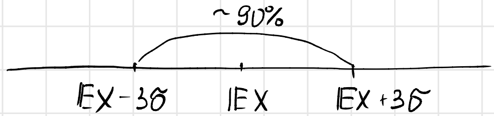
$$\boxed{DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}$$

Лекция №6

Следствие к неравенству Чебышева

Если $\varepsilon = 3\sqrt{DX} = 3\sigma$ $\quad$ $\sigma = \sqrt{DX} \leftarrow$ стандартное отклонение

$$P(|X - \mathbb{E}X| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \sim 90\%$$



Если X - норм. распр. случ величина, то
$$P(|X - \mathbb{E}X| < 3\sigma) \geq 0{,}997$$

Закон Больших Чисел (ЗБЧ) в форме Чебышева

(первая жемчужина теории вероятностей)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - независимые случ велич.
$\exists DX_i \leq C$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{\mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

или

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{\mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_n}{n}\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Док-во:

$$\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{\mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_n}{n}\right| = Y_n$$

Во-первых, Y_n - центрированная случайная величина (т.к. из каждой случайной величины вычитается ее мат. ожидание)

$\Rightarrow \mathbb{E}Y_n = 0$

По неравенству Чебышева

$$P(Y_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}Y_n^2}{\varepsilon^2} = \frac{DY_n}{\varepsilon^2} = \frac{D\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(X_1 + \ldots + X_n)}{n^2 \varepsilon^2} \leq$$

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2}{\varepsilon^2}$$

$$DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$$

$$= \frac{DX_1 + \ldots + DX_n}{n^2 \varepsilon^2} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

Следствие: Если $\mathbb{E}X_1 = \ldots = \mathbb{E}X_n$ (в частности, когда $X_1, \ldots, X_n$ одинаково распределены)

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right| \geq \varepsilon\right) \longrightarrow 0$$

Частный случай: (ЗБЧ Бернулли)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ незав. одинаково распределенные случайные величины: (н.о.р. сл. вел.)

$$X_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тогда в силу следствие:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \longrightarrow 1$$

Другая трактовка: Пусть у нас есть схема Бернулли (n независимых испытаний, каждое из которых может окончится наступлением или ненаступлением некоторого события A. И событие A наступает в каждом испытании с вер. p)

X_i в данном случае выступает как индикатор наступления события A в i-том испытании, а S_n трактуется как общее число наступлений события A в n испытаниях Бернулли.

$\frac{S_n}{n}$ - доля случаев в которых событие A наступило. Доля случаев отличается от неизвестной вероятности p на величину не превосходящую ε в вероятностью, которая стремится к 1, когда $n \to \infty$

> ЗБЧ выступает как инструмент для оценки неизвестной вероятности p

Теорема Пуассона

Пусть $S_n \sim Binom(n, p_n)$ и $np_n \to a$ при $n \to \infty$

зависит от n

(биномиальное распр.)

Тогда для $\forall k \geq 0$ $\quad P(S_n = k) \to \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

Замечание: Случайная величина Y имеет пуассон. распределение с параметром a если

$$P(Y = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Если просуммировать это по k от 0 до ∞, получим 1 $\Rightarrow$ никаких других значений у случ. велич. Y нет

Утв.: Пусть $S_n \sim Binom(n, p)$. Положим $a = np$. Тогда $\forall k \geq 0$

$$\left| P(S_n = k) - \frac{a^k}{k!} e^{-a} \right| \leq \frac{a^2}{n} = np^2$$

Док-во: (т. Пуассона)

Ниже $p = p_n$ (для сокращения записи)

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot ((n-k)+1)}_{k \text{ множителей}} \cdot p^k (1-p)^n \cdot (1-p)^{-k} =$$

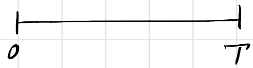
$$= \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{(np)^k}_{\to a^k} \underbrace{\left(1 - \frac{np}{n}\right)^n}_{\to e^{-a}} \cdot \underbrace{(1-p)^{-k}}_{\to 1} \xrightarrow[n \to \infty]{}$$

Вынесли из каждой скобки n и занесли сюда

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k!}\cdot 1\cdot \underset{(np\to a)}{a^k}\cdot e^{-a}\cdot 1 = \frac{1}{k!}a^k\cdot e^{-a}$$

Пример: Пуассоновское распределение часто появляется в моделях, описывающих системы массового обслуживания.

Есть некий интервал



И нас интересует допустим кол-во телефонных вызовов, которые появились на этом промежутке от 0 до T. Оказывается, в этом случае кол-во вызовов хорошо описывается с некоторым пар. a пуассоновским распределением

Пример: Задача о конкуренции

Представим, что у нас есть 2 пункта: A и B. Из пункта A в пункт B ходит электричка и не одна, а две

Из пункта A в пункт B каждое утро должны переезжать на работу или куда-то еще 1000 человек. Электрички отправляются в одно и то же время, они одинаково комфортны, поэтому любой пассажир выбирает ту или иную электричку с одной и той же вероятностью.

Но получается, чтобы не было отказов (Если захотят, то все 1000 смогут поехать на 1-ой электричке), каждое утро у нас 1000 пустых мест.

Но это слишком роскошно. Скажем так: мы готовы удовлетворить желающих ехать на той или иной электричке с вероятностью 90%. Что изменится? Сколько пустых мест окажется в этом случае?

$n = 1000$ - число пассажиров

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый пассажир выбирает 1-ю электр.} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

индикатор i-го пассажира с точки зрения выбора 1-ой электрички

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$ - число пасс., выбр. 1-ю электричку

m - число мест в 1-ой электричке

$P(\underbrace{S_n \le m}) \geqslant 0{,}9$

событие: все кто, захотел поехать в 1-ой, они найдут там место

X_i - н.о.р. сл. вел. имеющие распределение Бернулли, причем выбор происходит с вероятностью $\frac{1}{2}$

$S_n \sim Binom(n, \frac{1}{2})$

т.к. S_n имеет биноми. распр.

$$P(S_n \le m) = \sum_{k=0}^{m} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{m} \underset{\binom{n}{k}}{C_n^k} \cdot 2^{-n} \geqslant 0{,}9 \quad (1)$$

т.е. следует найти миним. значение m, для кот (1) выполн.

Воспользуемся Центральной предельной теоремой (ЦПТ)

Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

(Теорема о том, как ведут себя вероятности $S_n = m$)

Пусть $S_n \sim Binom(n, p)$ и $\underbrace{np(1-p)}_{\sigma^2} = DS_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Тогда для $\forall$ целого $m \geqslant 0$

$$P(S_n = m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)$$

Для этих вероятностей даны некоторые приближения через плотность нормального распределения

Лекция №7

$S_n \sim Binom(n,p) \quad \mathbb{E}S_n = np$

$DS_n = np(1-p) = \sigma^2$

Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа

(ЦПТ в частном случае)

$\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty \le a < b \le +\infty$

$$P\Big(a \le \underbrace{\frac{S_n - np}{\sigma}} \le b\Big) \xrightarrow[\text{по } a, b]{\text{равномерно}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

отнормировали случ величину S_n

$\mathbb{E}\frac{S_n - np}{\sigma} = 0 \quad D\frac{S_n - np}{\sigma} = 1$

интеграл появляется при достаточно слабых условиях, не обязательно случ вел должна иметь бином распр.

Пример: Задача о конкуренции (продолжение)

$P(S_n \le m) \ge 0{,}9$ Воспользуемся инт. теоремой М-Л

$n = 1000; \ p = \frac{1}{2}$

$np = 500 \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$

$$P(S_n \le m) = P\Big(\frac{S_n - 500}{5\sqrt{10}} \le \underbrace{\frac{m-500}{5\sqrt{10}}}_{b}\Big) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \ge 0{,}9$$

$a = -\infty \qquad b \sim 1{,}3 \Rightarrow m = 521$ (минимальное)

$P(S_n \le m) \ge 0{,}99 \Rightarrow m = 537$

Напоминание:

Основной объект - вероятностное пространство:

класс событий / сигма-алгебра подмножеств множества Ω

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — функция на случайных событиях, функция на $\mathcal{F}$

пространство элементарных исходов

До сих пор было:

1. Ω - не более, чем счетно
2. $\mathcal{F}$ - класс всех подмножеств Ω

Теперь: (убираем ограничения)

1. Ω - любое множество, любой мощности
2. $\mathcal{F}$ - класс событий, сигма-алгебра подмножеств множества Ω

т.е.
- $\Omega \in \mathcal{F}$
- если $A \in \mathcal{F}$, то $A^c = \bar{A} \in \mathcal{F}$
- если $\{A_i\} \subset \mathcal{F}$, то $\bigcup\limits_{1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

(σ-алгебра замкнута относительно счетных объединений и дополнений)

Примеры:

эти 2 элем. всегда должны быть

1. $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ - вырожд. σ-алгебра
2. $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, B, B^c\}$

собственное подмножество Ω

Опр: Борелевская σ-алгебра $(\mathcal{B})$ подмножеств $\mathbb{R}$ - это наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые мн-ва $\mathbb{R}$

все точки явл внутренними

Опр: эквивалентное

Борелевская σ-алгебра подмножеств $\mathbb{R}$ - это наименьшая σ-алгебра, содержащая все интервалы (a, b)

Эквивалентность вытекает из того факта, что любое открытое мн-во представимо в виде счетного объединения интервалов, т.к. мн-во рациональных точек на прямой всюду плотно

Отображение X из Ω в $\mathbb{R}$ прообраз борелевской σ-алгебры при отображении X

Опр: $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ назыв. случ вел., если $X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$, т.е. является подмн-ом

бор. мн-во

$\forall B \in \mathcal{B}$ имеет $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$

В этом случае X - измеримое отображение

Утв: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ явл. случ. велич. <=>

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \{\omega : X(\omega) < a\} = X^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}$

раньше при ограничениях это выполнялось всегда, т.к. было

2. $\mathcal{F}$ - класс всех подмножеств Ω

Примеры: Какие отображения всегда будут случайными величинами?

1. Отображение X - константа : $\omega \to c$ = const всегда является случайной величиной

Пусть $X(\omega) = C \quad \forall \omega \in \Omega \Rightarrow X$ - сл.в. всегда

$$X^{-1}((-\infty, a)) = \begin{cases} \Omega, & \text{если } a > C \\ \varnothing, & \text{если } a \leq C \end{cases}$$

$\Rightarrow$ по утв. X - явл. случ. велич.

А если 2 значения у отображения, будет ли это всегда случайной величиной?

2. $\Omega = [0, 1] \quad \mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, [0; 0{,}3), [0{,}3; 1]\}$

2. $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, B, B^c\}$ собственное подмножество Ω

$$X(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & \omega \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases}$$

Отображение не является измеримым относительно этой σ-алгебры, т.к. если взять полупрямую $(-\infty; \frac{3}{2})$

$$X^{-1}((-\infty, \frac{3}{2})) \notin \mathcal{F}$$

На каких ω $X < \frac{3}{2}$? Там, где $X(\omega) = 1$, т.к. $\omega \in [\frac{1}{2}; 1]$

$X^{-1}((-\infty, \frac{3}{2})) = [\frac{1}{2}; 1]$, но это не является элементом $\mathcal{F}$

$\Rightarrow X(\omega)$ - не является случайной величиной

С каждой случайной величиной связывают понятие функции распределения

Опр: Для $\forall$ случ. велич. X определяют функцию распределения этой случ велич. по следующей формуле:

$$F_X(z) = P(X < z) = P(\omega : X(\omega) < z)$$

Св-ва функции распределения:

1. Монотонность. Любая функция распределения неубыв.:
$\forall a_1 < a_2$ имеем $F(a_1) \le F(a_2)$

опустим индекс X

Док-во:

$$F(a_1) = P(X < a_1)$$
$$F(a_2) = P(X < a_2)$$

$\forall a_1 < a_2$:

$$\{\omega : X(\omega) < a_1\} \subset \{\omega : X(\omega) < a_2\} \Rightarrow P(X < a_1) \le P(X < a_2)$$

2. Функция распр. непр. слева, т.е. $a_n \uparrow a$, то $F(a_n) \uparrow F(a)$

сходится слева к a

Док-во:

Рассмотрим $B_n = [a_n, a)$ для $a_n \uparrow a$

$$B_n \supset B_{n+1} \qquad \bigcap_n B_n = \varnothing$$

$$\bigcap_n B_n = \lim_{n\to\infty} B_n$$

Тогда по св-ву непр. вер-ти

лекция 2

4) Св-во непрерывности вероятностей по монотонным последовательностям

неубыв.

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$

события

невозр

$B_1 \supset B_2 \supset \dots$

события

$$\lim A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\lim B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$$

$$\Downarrow$$

① $P(\lim A_i) = \lim P(A_i)$

② $P(\lim B_i) = \lim P(B_i)$

$C_1, C_2, \dots$ ← последов. множ

$$\overline{\lim} C_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \ge k} C_n$$

← событие происходит $\Leftrightarrow$ происходит бесконечное число событий C_i

$$\underline{\lim} C_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n \ge k} C_n$$

← событие происходит $\Leftrightarrow$ происходят все события C_i, начиная с некоторого номера

$$\lim_n P_X(B_n) = P_X(\lim B_n) = 0$$

т.к. это невозможное событие

$$P_X(B_n) = P_X(a_n \le X < a) = F(a) - F(a_n)$$

$$\Rightarrow \lim_n F(a) - F(a_n) = 0$$

$$\Rightarrow F(a_n) \uparrow F(a)$$

3. $\lim\limits_{a\to-\infty} F(a)=0$ Док-во аналогично 4 св-ву

4. $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a)=1$

Док-во: Положим $A_n=(-\infty,n)$

$A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \lim A_n = \cup A_i = \mathbb{R}$

По св-ву непр. вероятности:

$$\lim_n P_x(A_n) = P_x(\lim_n A_n) = P_x(\mathbb{R}) = 1$$

(Забыл рассказать раньше)

Для любой случайной величины вводится понятие распределения случ. величины

Опр: Для $\forall$ случ. велич. X определяют распределения этой случ велич. по следующей формуле:

$$\forall B \in \mathcal{B} \; : \; P_x(B) = P(\omega : X(\omega) \in B)$$

функция заданная на борелевской σ-алгебре

вероятность заданная на событиях (на $\mathcal{F}$)

Нужно, чтобы $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ (для этого нужна измеримость)

Замеч: Если функция распределения определяется

$F(z) = P(X \le z)$, то непрерывность слева заменяется на непрерывность справа

Пример: Пусть $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{B}$ - борелевская σ-алгебра подмножеств Ω, P – мера Лебега

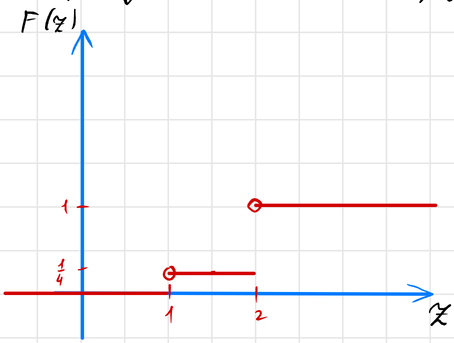
Опр: Мера Лебега на прямой – мера, которая каждому отрезку ставит в соответствие его длину

(продолжение примера)

X - случ. вел. : $X(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega \in [0, \frac{3}{4}) \\ 1, & \omega \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$

Это отображение является случайной величиной, т.к значения 1 и 2 принимаются на мн-вах, которые являются борелевскими: полуинтервал $[0, \frac{3}{4})$ является борелевским мн-вом и отрезок $[\frac{3}{4}, 1]$ - тоже борелевское мн-во

Нарисуем график функции распределения:



Вопрос:

Если мы знаем распределение случайной величины, мы знаем функцию распределения?

Да, т.к. нам достаточно в качестве B взять полупрямую от $-\infty$ до z и тогда получаем, что значение P_x на полупрямой это и есть значение функции распределения

И обратный вопрос: если мы знаем только функцию распределения, т.е мы знаем значение вероятности на полупрямых для случ. велич X, можем ли мы сказать какое распределение по X, можем ли мы найти все вероятности для любых борелевских мн-в? Да. объяснение на сл. лекции

Лекция №8

Напоминание:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вер. пространство

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ – измеримое отобр.

случ величина

$X^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{F}$

борелевская σ-алгебра

$F_X(z) = P(X < z)$

$P_X(B) = P(X \in B)$

элемент

борел. мн-во

Если $B = (-\infty, z)$

$P_X(B) = P(X < z) = F_X(z)$

Опр: Класс $\mathcal{R}$ подмн-в $\mathbb{R}$ назыв. алгеброй, если

1. $\mathbb{R} \in \mathcal{R}$ (прямая явл. элементом этого класса)
2. Если $A \in \mathcal{R}$, то $A^c \in \mathcal{R}$ (алгебра замкнута относительно
3. Если $A, B \in \mathcal{R}$, то $A \cup B \in \mathcal{R}$ дополнений и объединений)

Теорема: о продолжении вер-ти (меры)

Пусть на алгебре $\mathcal{R}$ задано неотриц. ф-ия мн-в μ, удовл. следующим св-вам:

1. $\mu(\mathbb{R}) = 1$
2. $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$, $A_i A_j = \varnothing$ $\bigcup_i^\infty A_i \in \mathcal{R}$, то
$$\mu\left(\bigcup_i^\infty A_i\right) = \sum_i^\infty \mu(A_i)$$

Тогда μ единственным образом продолжается на $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ – σ-алгебра, порожденная $\mathcal{R}$ (т.е наим. σ-алгебра, содержащая этот класс)

Продолжение является вероятностью на $\mathcal{S}$

Теорема: P_X однозн. определяется по F_X

Док-во: Рассмотрим класс мн-в $\mathcal{R}$ вида

$\{(-\infty, b), [a, b), [a, +\infty)$, а также всевозможные конечные объединения мн-в такого вида $\}$

Легко показать, что класс R образует алгебру

Покажем, что $S(R) = B$. Т.к. в этом равенстве слева и справа стоят классы множеств, то можно доказать по частям: включение одного класса в другой и наоборот

1. $B \subset S(R)$

B - это наименьшая σ-алгебра, содержащая все интервалы. Поэтому если мы покажем, что $S(R)$ содержит все интервалы, то мы докажем эту часть

Берем $(a, b) = \bigcup\limits_{1}^{\infty}[a + \frac{1}{n}, b)$ => мы можем используя операции объединения в счетном числе получить (a, b) используя мн-ва такого вида

$\{(-\infty, b), [a, b), [a, +\infty)\}$

наим σ-алгебра, содержащая все интервалы

$\Rightarrow (a, b) \in S(R) \Rightarrow B \subset S(R)$

какая-то σ-алгебра, содержащая все интервалы

2. $S(R) \subset B$

Надо показать, что все мн-ва этого типа принадлежат борелевской σ-алгебре

$\{(-\infty, b), [a, b), [a, +\infty)$, а также всевозможные конечные объединения мн-в такого вида $\}$

Мы уже показывали, что полуинтервал $[a, b)$ является борелевским мн-вом

$(-\infty, b)$ можно сказать интервал (полупрямая)

$[a, b)$: Т.к $[a, b) = \bigcap(a - \frac{1}{n}, b) \in B$

$\Rightarrow S(R) \subset B$

Определим некую функцию μ, которая удовлетворяет 2-м св-вам в теореме о продолжении вер-ти

Положим $\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$

$\mu((-\infty, b)) = F(b)$

$\mu([a, +\infty)) = 1 - F(a)$

μ - неотр., $\mu(\mathbb{R}) = 1$

Осталось понять выполнено ли для этой функции св-во счетной аддитивности

Покажем, что если у нас есть счетный набор полуинтервалов $\{\underbrace{[a_i, b_i)}_{= A_i}\}$: $A_i A_j = \varnothing$ и $\bigcup_1^\infty A_i = [a,b)$

для так определенной функции μ

то $\mu([a,b)) = \sum_1^\infty \mu(A_i)$

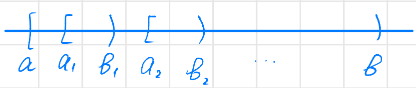
Докажем через вспомогательные неравенства:

$$\mu([a,b)) \geq \sum_1^\infty \mu(A_i)$$
$$\mu([a,b)) \leq \sum_1^\infty \mu(A_i)$$

1. $\mu([a,b)) \geq \sum_1^\infty \mu(A_i)$

фикс. n

$\forall n: [a,b) \supset \bigcup_1^n [a_i, b_i)$



Из св-в F : $\underbrace{F(b) - F(a)}_{= \mu([a,b))} \geq \sum_1^n \underbrace{(F(b_i) - F(a_i))}_{= \mu([a_i, b_i))}$

(по опр. функции μ)

Это справедливо для $\forall$ фикс. n

Левая часть от n не зависит, если в правой части устремить n к ∞, то получим сумму ряда, который остается все также не больше, чем левая часть $\Rightarrow$ $\mu([a,b)) \geq \sum_1^\infty \mu(A_i)$

2. $\mu([a,b)) \le \sum_{1}^{\infty} \mu(A_i)$

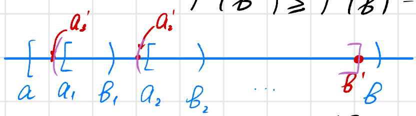
Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$

Вспомним св-во функции распр.:

2 Функция распр. непр. слева, т.е. $a_n \uparrow a$, то $F(a_n) \uparrow F(a)$ сходится слева к a

В силу непр. слева F: $\exists \underset{\text{набор}}{\{a_i'\}}$ и $\underset{\text{точка}}{b'}$: $a_i' < a_i$, $b' < b$

$$F(b') \ge F(b) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad F(a_i') \ge F(a_i) - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$



и получаем $[a, b'] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i', b_i)$

накрывается

Слева у нас стоит замкнутое мн-во, отрезок, который накрывается счетным кол-вом интервалов

$\Rightarrow \exists n: \ [a, b'] \subset \bigcup_{1}^{n} (a_i', b_i)$ можно выделить конечное подпокрытие

Легко показать по индукции:

Если имеет место такое включение, то из св-в функции распределения:

$$F(b') - F(a) \le \sum_{1}^{n} (F(b_i) - F(a_i'))$$

$$\underbrace{F(b) - F(a)}_{\mu([a,b))} \le \varepsilon + \sum_{1}^{n} \underbrace{(F(b_i) - F(a_i))}_{\mu([a_i,b_i))}$$

$\Rightarrow \mu([a,b)) \le \sum_{1}^{\infty} \mu(A_i)$

$\Rightarrow \mu([a,b)) = \sum_{1}^{\infty} \mu(A_i)$

$\Rightarrow \mu$ явл. счетно-аддитивной на ~~алгебру~~ класс $\mathcal{R}$, а следовательно единственным образом продолжается на σ-алгебру, порожденную этим классом $\mathcal{R}$, т.е. на борелевскую σ-алгебру

Как мы можем зная функцию распределения F_X задать P_X на полуинтервалах

$$P_X([a, b)) = F(b) - F(a) = \mu([a, b))$$

Замечание: Мера Лебега λ определяется на $[a, b)$:
$\lambda([a, b)) = b - a$

Теорема: Пусть $F(z)$ неубыв. ф-ия

1. $F(z) \to 0$, если $z \to -\infty$
2. $F(z) \to 1$, если $z \to +\infty$
3. $F(z)$ непр слева

Тогда $\exists (\Omega, \mathcal{F}, P)$ и случ вел. $X: \Omega \to \mathbb{R}$ для кот.
$F(z) = P(X < z)$

борел. б-ал

Док-во: Возьмем $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, P определ. на $\mathbb{R}$ из пред. теоремы $P([a, b)) = F(b) - F(a)$ и на полупрямых соотв.

В предыдущей теореме мы показали, что если мы функцию мн-в определим таким образом, то эта функция мн-в является счетно-аддитивной и может быть единственным образом продолжена на б-алгебру, порожденную $\mathcal{R}$, т.е на $\mathcal{B}$

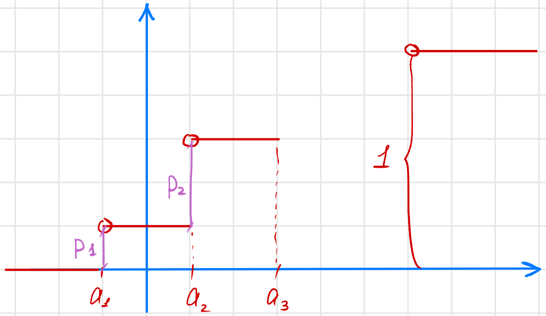
В качестве X – тожд. отобр: $X(a) = a$

$$\Rightarrow \underset{\underset{P((-\infty; z))}{\parallel}}{P(X < z)} = F(z)$$

Утв: Если случ. вел X дискр., т.е. принимает не более счетного числа знач.

$a_1, a_2, \ldots$ – значения $\qquad p_i = P(X = a_i)$
$p_1, p_2, \ldots$ – соотв. вер.

Для определенности $a_1 < a_2 < \dots$



Функция распределения для дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид

Любая функция распределения имеет не более счетного кол-ва разрывов

пояснение

Любая функция распределения монотонна, она зажата между 0 и 1

Сколько у нас может быть разрывов величины по-крайней мере $\frac{1}{2}$? Не больше 2

И т.д.: для любого n кол-во разрывов, которые не меньше $\frac{1}{n}$? Не больше n

Абсолютно непрерывные распределения

Опр: Говорят, что случ. велич. X имеет абсолютно непрерывное распределение, если для $\forall a \in \mathbb{R}$

$$F_X(a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(z)\,dz$$

Вообще говоря, не интеграл Римана, а интеграл Лебега. Но инт. Лебега и инт. Римана в тривиальных случаях совпадают

$f(z)$ - плотность распределения случ вел. X

Опр: Функция $f(z)$ является плотностью распределения случ. велич. X, если $\forall a \in \mathbb{R}$ имеет место вот такое равенство:

$$F_x(a) = \int_{-\infty}^{a} f(z)\,dz$$

Неверное опред.: плотность - производная функции распределения

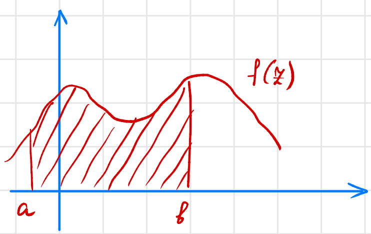
Св-ва плотности:

1. $F_x'(a) = f(a)$, если $f(z)$ непр. в т. a

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 1$

3. $f(z) \geq 0$ (почти всюду относительно меры Лебега)

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(z)\,dz \Rightarrow$$



для $\forall$ борел. мн-ва B

$$P(X \in B) = P_x(B) = \int_B f(z)\,dz$$

для интеграла Римана так нельзя

интегр. по борел. мн-ву

Вероятность попадания от a до b для случ велич. это есть площадь под кривой плотности на участке от a до b

Лекция №9

Напоминание:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, на котором определена случайная величина X, т.е измеримое отображение, действующее из Ω в $\mathbb{R}$

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

С любой случайной величиной связано понятие функции распределения:

$$F_X(z) = P(X < z)$$

Распределение называется абсолютно непрерывным, если $\forall z$ найдется функция $f(t)$ такая, что

$$F_X(z) = P(X < z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)\,dt$$ ← интеграл Лебега

Через плотность мы также можем написать значение вероятности $P_X(B)$ – распределение случ велич. X на прямой

$$P_X(B) = \int_B f(t)\,dt$$ ← 100% не интеграл Римана

Примеры:

- Нормальное или Гауссовское распределение:

В этом случае плотность имеет след. вид:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$N(a, \sigma^2)$ – нормальное распределение с параметрами a и σ^2

a – мат. ожид. этого нормального распределения

σ^2 – дисперсия этого нормального распределения

Пусть случ. велич. X имеет норм. распр. с пар. a и σ^2:

$$X \sim N(a, \sigma^2)$$

Рассмотрим новую случайную величину $Y = \dfrac{X-a}{\sigma}$

Возникает вопрос: какие преобразования над случайными величинами мы можем производить так, чтобы у нас получалась случайная величина? Ответим чуть позже

Есть ли плотность у случайной величины Y и как она выглядит?

хотим получить z

$$F_Y(z) = P\left(\frac{X-a}{\sigma} < z\right) = P(X < a + \sigma z) = \int_{-\infty}^{a+\sigma z} f(t)\,dt =$$

линейное преобразование

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}}_{\varphi(t) - \text{плотность } N(0,1)} dt$$

стандартное нормальное распределение

- Показательное или экспоненциальное распределение

X имеет показательное или экспоненциальное распределение с параметром λ, если плотность

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

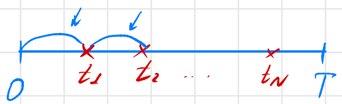
здесь можно написать $>$, т.к. мы меняем значение плотности в 1-й точке, интеграл который здесь стоит это интеграл Лебега, если изменить подынтегральную функцию в 1-й точке или на мн-ве меры 0, интеграл не изменится

$$\boxed{F_X(z) = P(X < z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)\,dt}$$

Показательное распределение встречается в таких моделях:

Пусть у нас есть некая система обслуживания и на эту систему поступают некие вызовы. Например, звонки, которые мы принимаем на свой телефон это одна из возможных моделей обслуживания.

Допустим, мы рассматриваем некий промежуток времени от 0 до T и отслеживаем число вызовов, которые поступили в течение этого промежутка.



Число вызовов хорошо моделируется пуассоновским распределением.

Пусть t_1 - поступление 1-го вызова, t_2 - второго и т.д.

$N \sim Pois$

А промежутки между вызовами тоже случайные, там уже будут непрерывные случайные величины. Длины промежутков и описываются показательным распределением.

Утв: св-во показательного распределения

Предположим, что мы взяли 2 произвольных значения: $t, h > 0$

Тогда оказывается, что вероятность того, что X, имеющее показательное распределение с параметром λ, больше, чем $t+h$ при условии, что X больше t, равна вероятности, что X больше h:

$$P(X > t+h \mid X > t) = P(X > h)$$

Пример на эту формулу:

Предположим, что X - длительность телефонного разговора.

$P(X > t+h \mid X > t)$ — мы хотим понять, будет ли разговор длится ещё по крайней мере ещё h моментов времени, если он уже длился по крайней мере t моментов времени.

В соответствии с этим равенством, эта величина от t не зависит, т.е. в каждый момент длительность предстоящего разговора такая, как будто мы только начали говорить

Док-во:

если это выполнено, то второе выполнено автомат.

$$P(X > t+h / X>t) = \frac{P(X>t+h,\, X>t)}{P(X>t)} = \frac{P(X>t+h)}{P(X>t)} = \frac{\int_{-\infty}^{t+h} f(z)\,dz}{\int_{-\infty}^{t} f(z)\,dz} =$$

формула $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geqslant 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$= \{$интеграл от экспон. функции тривиален$\} =$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X>h)$$

Это св-во явл. характеризационным, т.е. если распределение обладает таким св-вом и оно не является вырожденным, то это обязательно будет показательным распределением с каким-то показателем λ

X - случ. велич.

Пусть $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(X)$ явл. случ. велич.? Не всегда

Утв: Если g - борелевская функция, то $g(X)$ - случайная величина

Опр: g назыв. борелевской, если $g^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$

прообраз

является подклассом

борелевская б-алгебра

Док-во:

Измеримость X: $\forall B \in \mathcal{B}$ $\{\omega: X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

$$\{\omega: g(X(\omega)) \in B\} = \{\omega: X(\omega) \in \underbrace{g^{-1}(B)}_{\text{борелевское мн-во}}\} = X^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$$

Утв: Любая непрерывная функция g на прямой является борелевской

Док-во: Дост. док-ть, что для $\forall a \in \mathbb{R}$ $g^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{B}$

Справедливо следующее утверждение:

Утв: Если отображение g непрерывно, то прообразом открытого мн-ва является открытое мн-во

Док-во: Функция g непр. в т. x_0:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$: если $|x - x_0| < \delta$, то $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

Полупрямая - открытое мн-во.

Берем $g(x_0)$, оно должно лежать на полупрямой $(-\infty, a)$. А т.к. $(-\infty, a)$ - открытое мн-во, а $g(x_0)$ - точка на этом открытом мн-ве, то найдется ε-окрестность, где выполнено с одной стороны $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$, с другой стороны при достаточно малых δ все x окажутся в δ-окрестности x_0

Открытое мн-во - мн-во, которое содержит точки вместе с некоторыми окрестностями вокруг этих точек

Пример: Рассмотрим след. вероятностное пространство: $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, [0; \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}; 1]\}$, $P = \lambda$ ← мера Лебега

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & \text{если } \omega \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

X не явл случ величиной, т.к.
$\{\omega : X(\omega) < 0\} = [\frac{1}{2}, 1] \notin \mathcal{F}$

С другой стороны $X^2(\omega) \equiv 1$ - случайная величина

Замечание: Если X - случ. величина, g - непр., то $g(X)$ - сл. в.

$$P(g(X) < z) = \int_{-\infty}^{z} h(t)\,dt$$ если удастся, то $h(t)$ - плотность

пробовать

А если у нас 2 случайные величины, то если мы их сложим мы получим случайную величину?

Опр.: Пусть у нас есть k-мерное евклидовое пространство, которое наделено борелевской σ-алгеброй: $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$

класс подмножеств $\mathbb{R}^k$, который является наименьшей σ-алгеброй, содержащей все открытые мн-ва в $\mathbb{R}^k$

Вектор $X = (X_1, \dots, X_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$
Отображение X называется измеримым, если $X^{-1}(\mathcal{B}^k) \subset \mathcal{F}$ (1)

Утв.: характеризационное необх. и дост.
Для выполнения (1) $\iff$ $\forall a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$:
$\{\omega : X_1(\omega) < a_1, \dots, X_k(\omega) < a_k\} \in \mathcal{F}$

Следствие: Если $X_1, \dots, X_k$ - случ. вел., то вектор $(X_1, \dots, X_k)$ явл. случ вектором

Док-во: $\{\omega : X_1(\omega) < a_1, \dots, X_k(\omega) < a_k\} = \bigcap_{i=1}^{k} \underbrace{\{\omega : \overset{\text{сл. вел.}}{X_i(\omega)} < a_i\}}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$

σ-алгебра замкнута отн. конечн. пересеч.

Верно и обратное:

Если $(X_1, \dots, X_k)$ - случ. вектор, то любая компонента этого случайного вектора является случайной величиной

Док-во: $\{\omega : X_1(\omega) < a_1, \dots, X_k(\omega) < a_k\} \in \mathcal{F}$

(это мы знаем

Хотим док-ть, что X_1 - случ. велич., т.е.

$\{\omega : X_1(\omega) < a_1\} \in \mathcal{F}$

Возьмем все другие a_i начиная со 2 и до k равными $+\infty$

$\bigcap_{i=1}^{k} \{\omega : X_i(\omega) < a_i\} \in \mathcal{F}$ ← первый элемент пересечения нетривиальный, а все остальные Ω

Опр: Пусть $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, g называется борелевской, если $g^{-1}(\mathcal{B}^m) \subset \mathcal{B}^k$

Утв: Если $X = (X_1, \dots, X_k): \Omega \to \mathbb{R}^k$ - случайный вектор, и $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ борелевская функция, то $g(X): \Omega \to \mathbb{R}^m$ - случайный вектор

Пример:

Пусть $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ - сл. велич., то $X_1 + X_2$ - сл. велич?

$\Downarrow$

(X_1, X_2) - случ. вектор по следствию

Следствие: Если $X_1, \dots, X_k$ - случ. вел., то вектор $(X_1, \dots, X_k)$ явл. случ. вектором

$\Rightarrow$ $X_1 + X_2$ - случ. величина, как непр. отображение $(x, y) \to x + y$

Начиная с этого момента для сокращения будем писать вместо k-мерных векторов, 2-мерные

Опр: Пусть $X=(X_1, X_2)$ случ. вектор. Ф-ия распределения случ. вектора X определяется формулой:

$$F_X(z_1, z_2) = P(X_1 < z_1, X_2 < z_2)$$

С одной стороны это функция распределения случайного вектора, а с другой стороны это совместная функция распределения случ. величин X_1, X_2

Опр: Функция $f(z_1, z_2)$ называется плотностью случайного ~~вектора~~ вектора $X=(X_1, X_2)$, если для $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$F_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2} f(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2$$ ← не интегралы Римана, а интегралы Лебега по мере Лебега на плоскости

Вопрос: Если мы знаем функцию распределения вектора или плотность вектора, в этом случае плотность у 1-ой компоненты существует? Если да, то как ее найти?

Существует: (устремляем z_2 к $+\infty$)

$$\lim_{z_2 \to \infty} F_X(z_1, z_2) = P(X_1 < z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z_1, z_2)\, dz_2\right)}_{f_{X_1}(z_1) - \text{плотность случ. велич. } X_1} dz_1$$

Лекция №10

$X = (X_1, \ldots, X_k)$ – случ. вектор

Опр: $\forall B^k \in \mathcal{B}^k$ в k-мерном евклидовом пространстве

борелевская σ-алгебра

борелевское мн-во

распределение случайного вектора X это есть

вероятностная мера

$$P_X(B^k) = P(X \in B^k)$$

P из вероятностного пространства

Опр: Случ. величины $X_1, X_2, \ldots$ называются независимыми или независимыми в совокупности, если $\forall\, i_1, \ldots, i_k$ случ. величины $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}$ независимы

Опр: Случайные величины $X_1, \ldots, X_k$ называются независимыми, если $\forall$ борелевских $B_1, \ldots, B_k$:

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_k \in B_k) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i \in B_i)$$

Утв: $X_1, \ldots, X_k$ независимы $\Leftrightarrow$ $\forall\, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$

$$P(X_1 < a_1, \ldots, X_k < a_k) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i < a_i)$$

функция распределения случайного вектора или совместная функция распределения случайных величин $X_1, \ldots X_k$

функции распределения отдельных случайных величин

$$F_X(a_1, \ldots, a_k) = \prod_1^k F_X(a_i)$$

Утв: Пусть $f(z_1, \ldots, z_k)$ есть плотность случ. вектора $(X_1, \ldots, X_k)$. Тогда для независимости $X_1, \ldots, X_k \Leftrightarrow$

$$f(z_1, \ldots, z_k) = \prod_1^k f_i(z_i)$$

плотность i-ой компоненты вектора

Вытекает из предыдущего утв., т.к.

$$F_X(a_1, \ldots, a_k) = \prod_1^k F_X(a_i)$$ ← одинарные интегралы

к-мерный интеграл

Для того чтобы интегралы при любых наборах $a_1, \ldots, a_k$ совпадали необх. и дост., чтобы подынтегральные функции совпадали

Пример: Пусть у нас на плоскости есть некая область B, у которой существует конечная площадь, на языке меры Лебега это означает, что область, которую мы рассматриваем это лебеговское мн-во, т.е. на котором мера Лебега определена и мера Лебега мн-ва B конечна

Мера Лебега на прямой – мера, которая каждому полуинтервалу ставит в соответствие его длину

Мера Лебега на плоскости – мера, которая станд. прямоугольнику ставит в соответствие его площадь

мн-во B на плоскости

$$B \subset \mathbb{R}^2$$

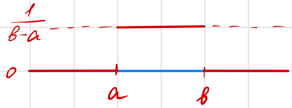
$$\lambda(B) < \infty$$

мера Лебега конечна

Случайный вектор (X_1, X_2) имеет равномерное распределение на B, если $\forall$ A – мн-во на котором мера Лебега определена

$$P(X \in A) = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(B)}$$

Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ – это распределение, у которого плотность до a это 0, на отрезке от a до b это константа равная длине b–a и дальше опять 0



Формула свертки

Пусть случайные величины X_1, X_2 независимы.
$Y = X_1 + X_2$ – случ. величина
Предположим, что X_1, X_2 имеют абсолютно непрерывное распределение (распределения, у которого существует плотность)
X_1, X_2 – сл.велич. с плотностями $f_i(z)$, $i = 1, 2$
У сл. велич. Y есть ли плотность и как она выражается через f_1 и f_2?

Попытаемся найти плотность случайной величины Y:

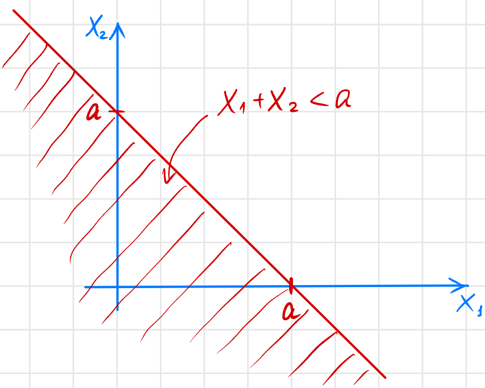
$$P(Y < a) = \int_{-\infty}^{a} f(z)\,dz$$

если удастся получить представление в виде интеграла, то $f(z)$ – плотность

(функция распределения случ. велич. Y

$$P(Y < a) = P(X_1 + X_2 < a)$$

Для определенности $a > 0$



Обозначим эту зону B_a:

$$P(X_1 + X_2 < a) = P((X_1, X_2) \in B_a)$$

Но вектор (X_1, X_2) – вектор с независимыми компонентами

$\Rightarrow$ Плотность случ. вектора (X_1, X_2) – это произведение плотностей компонент

$$P((X_1, X_2) \in B_a) = \iint_{B_a} \underbrace{f_1(z_1)\cdot f_2(z_2)}_{\text{плотность сл. вектора } (X_1, X_2)} dz_1\, dz_2 \leftarrow$$ интеграл Лебега-Стилтьеса

но если f_1, f_2 – „хорошие", то это интеграл Римана

$$\iint_{B_a} f_1(z_1)\cdot f_2(z_2)\, dz_1\, dz_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{a-z_1} f_1(z_1) f_2(z_2)\, dz_2\, dz_1 = \int_{-\infty}^{a} \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z_1) f_2(z - z_1)\, dz_1}^{f(z)} dz =$$

от двойного к повторному

Замена переменных
$z = z_2 + z_1$
$dz = dz_2$
$a - z_1 \to a$

\+ Поменяли порядок интегрирования

$$= \int_{-\infty}^{a} f(z)\, dz$$

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z_1) f_2(z - z_1)\, dz_1 \leftarrow$$ плотность случ. величины Y

Формула свертки

Пример: Пусть X_1, X_2 – независимы и $X_i \sim N(a_i, \sigma_i^2)$

Рассматриваем сумму $X_1 + X_2$. Какое распределение у этой суммы?

Применим формулу свертки: (посчитать самостоят.)

$$X_1 + X_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Последовательности случайных величин и типы сходимости

Утв: Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – случ. величины (определены на одном вероятностном пр-ве)

Тогда $\inf X_i$, $\sup X_i$, $\overline{\lim} X_i$, $\underline{\lim}\, X_i$ – случ. величины

Док-во: Мы говорим, что отображение измеримо $\Leftrightarrow$ для $\forall a$ прообраз полупрямой $(-\infty, a)$ является событием, т.е принадлежит борелевской σ-алгебре $\mathcal{F}$

Надо понять, что это мн-во $\in \mathcal{F}$ есть число, которое 100% $< a$

$$\{\omega \in \Omega : \inf X_i(\omega) < a\} = \{\omega \in \Omega : \bigcup_{i=1}^{\infty} (X_i(\omega) < a)\} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) < a\}}_{\text{событие, т.е. элемент } \mathcal{F}} \in \mathcal{F} \leftarrow$$ σ-алгебра замкнута отн. объедин.

sup выражаем через inf: $\sup X_i = -\inf(-X_i)$

$\overline{\lim} X_i$ выражаем через sup и inf: $\overline{\lim} X_i = \inf\limits_n \sup\limits_{k \geq n} X_k$

$\underline{\lim} X_i$ выражаем через sup и inf: $\underline{\lim} X_i = \sup\limits_n \inf\limits_{k \geq n} X_k$

Следствие: мн-во $\{\omega \in \Omega : \exists \lim X_i(\omega)\} \in \mathcal{F}$

Док-во: $\{\omega \in \Omega : \exists \lim X_i(\omega)\} = \{\omega \in \Omega : \overline{\lim} X_i = \underline{\lim} X_i\} =$

прообраз бор. мн-ва — борелевское мн-во

$= \{\omega \in \Omega : \overline{\lim} X_i - \underline{\lim} X_i = 0\} \in \mathcal{F}$

это случайные величины, их разность тоже случ величина

Опр: Предполагаем, что все элементы последовательности заданы на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Последовательность случ. величин $X_1, X_2, \ldots$ сходится к случайной величине X почти всюду, если
$P(\omega : \lim X_i(\omega) \neq X(\omega)) = 0$

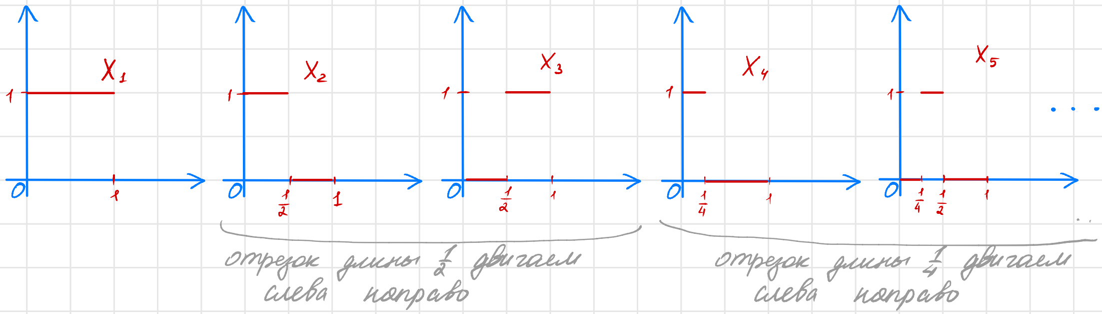
Опр: Последовательность случ. величин $X_1, X_2, \ldots$ сходится к случайной величине X по вероятности, если $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Замечание: Из сходимости почти всюду вытекает сходимость по вероятности
! НО ! наоборот нет

ЗБЧ для один. распр. случ. велич.:
$\forall \varepsilon > 0$
$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbb{E} X_1\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Пример: Из сходимости по вероятности не следует сходимость почти всюду

$\Omega = [0, 1], \quad \mathcal{F} = \mathcal{B}, \quad P = \lambda$



У этой последовательности есть сходимость по вероятности к 0, т.к. сначала X_1 отличается от нуля на всем отрезке, затем X_2 отличается от нуля на отрезке длины $\frac{1}{2}$, то есть с вероятностью $\frac{1}{2}$, затем отличие от нуля на участке длины $\frac{1}{4}$, затем $\frac{1}{8}$ и т.д.

Но поточечно эта последовательность не сходится, т.к. в каждой точке отрезка [0,1] обязательно в какой-то момент „пробежит" эта горизонталь на уровне 1.

Характеризационное св-во сходимости почти всюду:

$X_n \to X$

Последовательность X_n сходится к X почти всюду $\Leftrightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\sup\limits_{m \geq n} |X_m - X| > \frac{1}{k}\right) = 0$ (1)

Замечание: Из (1) сразу вытекает, что сходимость почти всюду влечет за собой сходимость по вероятности

Док-во: (св-во)

($\Leftarrow$)

Перепишем (1)

$$0 \overset{\text{по (1)}}{=} \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{\bigcup_{m \geq n} |X_m - X| > \frac{1}{k}}_{B_n}\Big) \Leftrightarrow$$

Как связаны B_n и B_{n+1}? $B_n \supset B_{n+1}$

B_n образуют монотонную последовательность, а значит по св-ву непрерывности вер-ти по монот. последовательностям:

$$\Leftrightarrow P\Big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m\geq n} |X_m - X| > \frac{1}{k}}_{A_k}\Big) \quad (2)$$

$= 0$

$$\Rightarrow P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{1}^{\infty} P(A_k) = 0 \quad (3)$$

в силу счетной полуаддитивности вероятности

|||

$\exists k: \forall n: \exists m \geq n: \ |X_m(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{k}$ ← мн-во, где нет сходимости

$\Rightarrow$ Получили, что предел не существует с вероятностью 0 $\Rightarrow$ существует с вероятностью 1

$\Rightarrow$ Если имеет место сходимость почти всюду, то выполнено 3: $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 0 \Rightarrow$ вероятность каждого A_k равна 0, а это (2)

Лекция №11

Определение мат. ожид. в общем случае

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство и на нем определена случайная величина $Y: \Omega \to \mathbb{R}$, т.е. функция определенная на Ω со значениями $\mathbb{R}$, кот. является измеримой.

Если распределение случайной величины выглядело таким образом $Y:$ $\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{matrix}$ ← значения
← с вероятностями

$$\mathbb{E}Y = \sum_1^n a_i p_i = \sum_1^n a_i P(\underbrace{Y=a_i}_{A_i}) = \sum_1^n a_i P(A_i)$$

$A_i A_j = \varnothing$
$\bigcup\limits_1^n A_i = \Omega$

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$$

Если возьмем произвольное значение $\omega \in \Omega$, тогда т.к. на A_i у нас такие условия: $A_i A_j = \varnothing$, $\bigcup\limits_1^n A_i = \Omega$, то

значит ω попадает в какое-то A_i и ровно в одно и на этом ω соотв. случ. велич. Y принимает значение a_i, т.к. индикатор на A_i будет равняться 1, а остальные индикаторы 0

Любая функция f может быть представлена в виде: $f = f^+ - f^-$, где $\underset{\geqslant 0}{f^+} = \max(0, f)$, $\underset{\geqslant 0}{f^-} = \max(0, -f)$

Y - функция => для Y имеет место такое представление: $Y = Y^+ - Y^-$ $\quad Y^+ = \max(0, Y)$ =>
↑ функция непрерывная

Y^+, Y^- – измеримые
=> Y^+, Y^- – тоже случайные величины

из св-ва линейности

$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}Y^+ - \mathbb{E}Y^-$ (при условии, что мат ожид. сущ.) конечны

=> Надо определить $\mathbb{E}Y$, когда $Y \geqslant 0$

Рассмотрим послед. случ. велич $\{Y_n\}$

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n} \cdot \mathbb{1}_{C_k} + n \cdot \mathbb{1}_{\{Y(\omega) > n\}}$$

$$C_k = \{\omega : \frac{k-1}{n} \le Y(\omega) < \frac{k}{n}\} \in \mathcal{F}$$

опр. мат. ожидания не зависит от того как мы поделили область Y

по опр.

$$\mathbb{E}Y_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n} \cdot P(C_k) + n \cdot P(Y \geq n)$$

по постр. есть поточечная сход к Y

$$Y_n(\omega) \uparrow Y(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

послед. Y_n неубыв.

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}Y_n$ неубыв.

Полагая $\mathbb{E}Y = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n$, если предел конечен

$$\mathbb{E}Y = \int_\Omega Y(\omega)\, P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\, P_Y(x)$$

P_Y - распределение случ. велич Y / функция, которая задана на измеримом пространстве прямая и борелевская σ-алгебра $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_Y(x)$$

F_Y – функция распределения Y случ. величины Y

2 частных случая:

- Если случайная величина дискретна, но принимает счетное число значений, то ряд стал бесконечным, и сумма ряда есть мат. ожидание, если ряд сходится абсолютно

$$\mathbb{E}Y = \sum_1^{\infty} a_i p_i$$

вытекает из определения $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}Y^+ - \mathbb{E}Y^-$

- Если случайная величина Y абсолютно непрерывна, т.е.

если у нее существует плотность:

Предположим, что случ. величина Y имеет абсолютно непрерывное распределение, т.е.

$$\exists f(z): \forall a \quad P(Y<a) = \int_{-\infty}^{a} f(z)\,dz$$

Докажем, что если $\int_{-\infty}^{\infty}|z|f(z)\,dz < \infty$ (конечен), то в этом случае

можем считать, что это интеграл Римана

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z)\,dz$$

Т.к. у нас мат ожид. является линейной функцией и выражается через мат. ожид. Y^+ и Y^-, то достаточно док-ть эту формулу для случая, когда Y неотриц.

Рассмотрим $Y \geq 0$:

$\Rightarrow f(z)$ на отриц. части прямой равна $0 \Rightarrow$

Остается интегрирование только по положительной части прямой

просто поставим вместо n, т.к. ничего не меняет

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\cdot \mathbb{1}_{C_k} + \boxed{0}\cdot \mathbb{1}_{\{Y(\omega)>n\}}$$

$$C_k = \left\{\omega : \frac{k-1}{n} \leq Y(\omega) < \frac{k}{n}\right\} \in \mathcal{F}$$

опр. мат ожидания не зависит от того как мы поделили область Y

по опр.

$$\mathbb{E}Y_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n}\cdot P(C_k) + \boxed{0}\cdot P(Y \geq n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k-1}{n} \cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(z)\,dz$$

$$\underbrace{\int_{0}^{+\infty} z\cdot f(z)\,dz}_{=\int_0^n z\cdot f(z)\,dz + \int_n^{+\infty} z\cdot f(z)\,dz} - \mathbb{E}Y_n = \int_{n}^{+\infty} z\cdot f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n^2} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(z - \frac{k-1}{n}\right) f(z)\,dz \geq 0$$

$$\int_n^{+\infty} z\cdot f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\underbrace{\left(z-\frac{k-1}{n}\right)}_{\leq \frac{1}{n}} f(z)\,dz \leq \underbrace{\int_n^{+\infty} z\cdot f(z)\,dz}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{n}\int_0^n f(z)\,dz}_{\leq \frac{1}{n},\ \text{т.к.}\ \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 1} \to 0$$

$$\sum_{k=1}^{n^2}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(z)\,dz = \int_0^n f(z)\,dz$$

$\int_{-\infty}^{\infty}|z|f(z)\,dz < \infty$ (конечен) по условию, а $\int_n^{+\infty} z\cdot f(z)\,dz$ – хвост сходящегося интеграла $\Rightarrow \int_n^{+\infty} z\cdot f(z)\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Y_n = \int_0^{+\infty} z\cdot f(z)\,dz$$

Рассмотрим случай, когда случ. велич. неотриц.

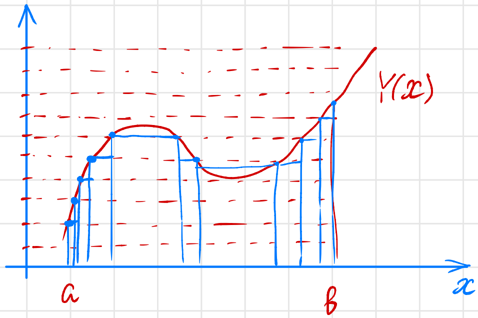
Хотим эту функцию проинтегрировать с одной стороны по Риману:

$$\int_a^b Y(x)\,dx$$

Мы делим область интегрирования $[a,b]$ на маленькие отрезочки, берем на маленьких отрезках берем сначала столбик, высота которого соответствует минимальному значению функции на этом отрезке, собираем их площади и получается нижняя сумма, а когда собираем столбики с максимальным значением на отрезке, то получается верхняя сумма. Если мы уменьшаем длины этих отрезков и у нас обе суммы сходятся к одному и тому же, то это и есть интеграл

С другой стороны в этом случае мы делим область изменения функции

$$C_k = \{\omega : \frac{k-1}{n} \leq Y(\omega) < \frac{k}{n}\} \in \mathcal{F}$$



Берем ось y и делим ее на отрезки длины $\frac{1}{n}$

$\int_{[a,b]} Y(x)\lambda(dx)$ ← интегрирование идет по мере Лебега, но мы помним, что мера Лебега отрезка это длина этого отрезка, и очень часто в интегралах Лебега пишется вместо $\lambda(dx)$ просто dx

Если мы начинаем уменьшать длины этих отрезков в области изменения самой функции и если в результате получается что-то конечное, то это и будет интеграл Лебега

Интегрирование по Риману и по Лебегу это одно и то же, если функция „хорошая", в том смысле, что у нее существует интеграл Римана

Утв: Если у функции существует интеграл Римана, то можно показать, что интеграл Лебега существует и они равны. ! НО ! обратное неверно

Пример: Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Эта функция по Риману никак не интегрируема, т.к. нижняя сумма всегда 0, а верхняя сумма всегда 1

А вот интеграл Лебега на отрезке [2; 5] будет равен 0, т.к мн-во точек иррациональных на 2-5 имеет меру Лебега 3, а мера Лебега рациональных точек 0

Пример: Рассмотрим случайную величину, которая имеет стандартное нормальное распределение.

$X \sim N(0,1) \Rightarrow$ плотность $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} z\varphi(z)\,dz = 0$, т.к. подынтегральная функция нечетная, симметричная относительно 0, а интегрирование по всей прямой

Св-ва мат. ожидания (продолжение)

7. Если g - измеримая функция и $\mathbb{E}g(Y)$ существ., то $\mathbb{E}g(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) f(z)\,dz$ (2)

Мы знаем, что если функция g - измерима, то $g(Y)$ - случ величина, для случайных величин мат. ожидание считается по формуле $\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z)\,dz$ если есть плотность, но мы здесь не ищем плотность новой случайной величины $g(Y)$, а пользуемся плотностью исходной случ. величины Y: $f(z)$, но интегрируем не по z, а по $g(z)$

Док-во: по опр.

Т.к $DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$, но $\mathbb{E}X = 0$

$\Rightarrow \quad DX = \mathbb{E}(X^2)$

По формули (2):

$$DX = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \varphi(z)\,dz \overset{\text{по частям}}{=} -\frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}_{\varphi(z)} dz = 0 + 1 = 1$$

но $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z)\,dz = 1$

Вывод: $X \sim N(0,1) \Rightarrow \mathbb{E}X = 0,\ DX = 1$

Если $Y \sim N(a, \sigma^2)$

по распределению

$$\frac{Y-a}{\sigma} \overset{d}{=} X \sim N(0,1)$$

$$Y = a + \sigma X \Rightarrow \mathbb{E}Y = a \quad DY = \sigma^2$$

Св-ва мат. ожидания:

1. $\mathbb{E}cY = c\mathbb{E}Y$
2. $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$
3. Если X, Y независ., то $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$
4. $\mathbb{E}g(Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(z) f(z)\, dz$

Если $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$ существуют

Первые 3 св-ва были доказаны в элементарной части курса, когда мы рассматривали только дискретный случай, а т.к. общий случай определялся через дискретный, то мы берем эти св-ва из дискретного случая и предельным переходом получаем 3 первых св-ва

Неравенство Колмогорова:

Пусть случ. величины $X_1, \dots, X_n$ независимы, $\mathbb{E}X_i = 0$ и $\exists\, \mathbb{E}X_i^2\ \forall i$.

Тогда $\forall a > 0$:
$$P(\overbrace{\max_{1 \le k \le n} |\underbrace{X_1 + \dots + X_k}_{S_k}| > a}^{A}) \le \frac{\sum\limits_1^n \mathbb{E}X_i^2}{a^2} \qquad (3)$$

Зам.: Из неравенства Чебышева Маркова можем записать:

$$P(|X_1 + \dots + X_n| > a) \le \frac{\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n)^2}{a^2} =$$

$$= \frac{\mathbb{E}X_1^2 + \mathbb{E}X_2^2 + \dots + \mathbb{E}X_n^2 + 2\underbrace{\mathbb{E}X_1X_2}_{0} + 2\underbrace{\mathbb{E}X_1X_3}_{0} + \dots + 2\mathbb{E}X_{n-1}X_n}{a^2} =$$

$2\underset{0}{\mathbb{E}X_{n-1}} \cdot \underset{0}{\mathbb{E}X_n}$ т.к. независ.

$$= \frac{\mathbb{E}X_1^2 + \mathbb{E}X_2^2 + \ldots + \mathbb{E}X_n^2}{a^2} = \frac{\sum_1^n \mathbb{E}X_i^2}{a^2}$$

Сравним левые части неравенств

$P(|X_1 + \ldots + X_n| > a)$

$P(\max\limits_{1 \le k \le n} |X_1 + \ldots + X_k| > a)$

$$P(|X_1 + \ldots + X_n| > a) \leqslant P(\max_{1 \le k \le n} |X_1 + \ldots + X_k| > a)$$

Док-во:

k - тот индекс, на котором мы впервые выскочили за границу a

Определим $A_k = \{\omega : \max\limits_{1 \le \ell \le k-1} |S_\ell| \le a, |S_k| > a\}$

$\Rightarrow A_i A_j = \varnothing, \quad \bigcup\limits_{k=1}^n A_k = A$

$$\sum_1^n \mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}S_n^2 = \mathbb{E}(S_n - S_k + S_k)^2 \geqslant \mathbb{E}(S_n - S_k + S_k)^2 \cdot \mathbb{1}_A =$$

из замечания

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(S_n - S_k + S_k)^2 \mathbb{1}_{A_k} \geqslant$$

$(S_n - S_k)^2 + 2(S_n - S_k) \cdot S_k + S_k^2$

выбросим

$$\geqslant \sum_{k=1}^n \mathbb{E}S_k^2 \cdot \mathbb{1}_{A_k} + 2\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(S_n - S_k) \cdot S_k \cdot \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}S_k^2 \cdot \mathbb{1}_{A_k} + 2\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(S_n - S_k) \cdot \mathbb{E}S_k \cdot \mathbb{1}_{A_k} \ominus$$

сумма X_i от $k+1$ до n
она независит от первых k

независимы

но $\mathbb{E}(S_n - S_k) = 0 \Rightarrow 2\sum\limits_{k=1}^n \mathbb{E}(S_n - S_k) \cdot \mathbb{E}S_k \cdot \mathbb{1}_{A_k} = 0$

заменяем S_k^2 на a^2

$$\ominus \sum_{k=1}^n \mathbb{E}S_k^2 \cdot \mathbb{1}_{A_k} \geqslant a^2 \mathbb{E}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} = a^2 \mathbb{E}\mathbb{1}_A = a^2 P(A)$$

A_k определены так, что $|S_k| > a$ на них

$\Rightarrow \sum\limits_1^n \mathbb{E}X_i^2 \geqslant a^2 P(A) \quad | : a^2$

$$\frac{\sum_1^n \mathbb{E}X_i^2}{a^2} \geqslant P(A)$$

Лекция №12

Напоминание:

Неравенство Колмогорова:

Если $Y_1, \dots, Y_n$ - независ., $\mathbb{E}Y_i = 0$, $\forall a > 0$

$$P(\max_{1 \le k \le n} |\underbrace{Y_1 + \dots + Y_k}_{S_k}| > a) \le \frac{\sum_1^n \mathbb{E}Y_i^2}{a^2} = \frac{DS_n}{a^2}$$

Лемма Бореля-Кантелли:

Обозначения:

Пусть $\{A_i\}$ - совокупность случайных событий

Обозначим $A^+ = \overline{\lim} A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \ge n} A_k$

1. Если $\sum_1^{\infty} P(A_i) < \infty$ (сходится), то $P(A^+) = 0$

2. Если $\sum_1^{\infty} P(A_i) = +\infty$ и $\{A_i\}$ - независ. (нельзя опустить), то $P(A^+) = 1$

Замеч.: Почему нельзя опустить условие независимости:

Пусть $A: 0 < P(A) < 1$. Возьмем $A_i = A$ $\forall i$

При условии события A_i зависимы, имеет место расходимость, но $P(A^+) \ne 1$, т.к. верхний предел в данном случае это само событие A

Док-во:

1. $A^+ = \overline{\lim} A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overbrace{\bigcup_{k \ge n} A_k}^{B_n}$

Последовательность B_n монотонная, т.к. $B_n \supset B_{n+1}$

$\Rightarrow$ B_n - монотонно невозрастающая

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \lim B_n$$

По св-ву непрерывности вероятности: $P(A^+) = \lim P(B_n)$

По св-ву полуаддитивности вероятности:

$$P(A^+) = \lim P(B_n) \le \overbrace{\sum_{k\ge n} P(A_k)}^{\text{хвост ряда}} \longrightarrow 0$$

из сходимости ряда

св-во непр. вероятн.

$$2.\ P(A^+) = \lim P(B_n) = \lim_n \left(1 - P\left(\bigcap_{k\ge n} A_k^c\right)\right) = 1 - \lim_n \lim_\ell P\left(\bigcap_{k=n}^{\ell} A_k^c\right) =$$

противоположное событие

$B_n = \bigcup_{k\ge n} A_k$

Если A_k незав., то A_k^c тоже незав. $\Rightarrow$ $\cap$ можно превратить в Π

$$= 1 - \lim_n \lim_\ell \prod_{k=n}^{\ell} P(A_k^c) = 1 - \lim_n \prod_{k\ge n} (1 - \underbrace{P(A_k)}_{\alpha_k}) = 1$$

Из мат. анализа мы знаем, что если $\sum_1^\infty \alpha_k = +\infty$ и $0 \le \alpha_k \le 1$, то $\lim_n \prod_{k\ge n} (1-\alpha_k) = 0$

Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) (Колмогоров)

Пусть $X_1, \dots, X_n$ независимые случ. величины и $\sum_{k=1}^\infty \frac{DX_k}{k^2} < \infty$ сходится

Тогда $$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{\mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{п.в.}$$

Что изменилось?

1. В ЗБЧ (Ч.) $DX_i \le C \quad \forall i$

Если $DX_i \le C$, то $\sum_{k=1}^\infty \frac{DX_k}{k^2} < \infty$ автоматически, т.к.

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{DX_k}{k^2} \le C \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\right) \to \text{сходим.}$$ $\Rightarrow$ ослабили условие на дисперсии

2. В ЗБЧ (Ч.) была сходимость по вероятности, что слабее сходимости почти всюду

Док-во: Положим $Y_i = X_i - \mathbb{E}X_i$. Заметим, что $\mathbb{E}Y_i = 0$

$DY_i = DX_i$ (сдвиг случ. велич. не меняет ее дисперсию)

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{DY_k}{k^2} < \infty$

Т.е. надо док-ть, что $\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \to 0$ п.в.

Положим $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$

По характериз. св-ву сходим. почти всюду (п.в.) для $\frac{S_k}{k} \xrightarrow[\text{п.в.}]{} 0$ необх. и дост. доказать, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n} P(\sup\limits_{k \geq n} \frac{|S_k|}{k} > \varepsilon) = 0 \quad (1)$

Характеризационное св-во сходимости почти всюду

$X_n \to X$

Последовательность X_n сходится к X почти всюду $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad \lim\limits_{n \to \infty} P(\sup\limits_{m \geq n} |X_m - X| > \frac{1}{k}) = 0 \quad (1)$

Введем мн-ва:

$$A_n = \left\{ \max_{k: 2^{n-1} \leq k \leq 2^n} \frac{|S_k|}{k} > \varepsilon \right\}$$

Для док-ва (1) дост. док-ть, что

$$\lim_n P(\underbrace{\sup_{k \geq n} A_k}_{B_n}) = 0$$

B_n - монот. послед. $\Rightarrow$ lim можно вносить под знак вероятности как пересечение

По лемме Бореля-Кантелли дост. доказать, что $\sum_1^{\infty} P(A_n) < \infty$

мажорируем $2^{n-1} \leq k$

по нер. Колмогорова

$$P(A_n) \leq P(\max_{2^{n-1} \leq k \leq 2^k} |S_k| > \varepsilon \cdot 2^{n-1}) \leq \frac{DS_{2^n}}{\varepsilon^2 \cdot 2^{2(n-1)}} = \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot 2^{2(n-1)}} \sum_{k=1}^{2^n} \sigma_k^2, \text{ где}$$

$$\sigma_k^2 = DY_k = DX_k$$

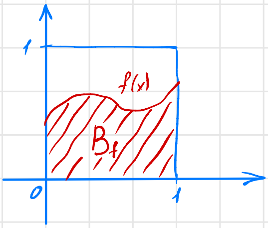
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot 2^{2(n-1)}} \sum_{k=1}^{2^n} \sigma_k^2$$

Все слагаемые неотриц., можем поменять местами суммирования

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \le 4\varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 \underbrace{\sum_{n: 2^n \ge k} 2^{-2n}}_{\text{геом прогр.}} \le \frac{16}{3}\varepsilon^{-2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2}}_{\text{по условию этот ряд сход.}} < \infty$$

Пример: (Метод Монте-Карло) Допустим надо посчитать интеграл:

$\int_0^1 f(x)\,dx$ f – непр., и принимает значения от 0 до 1



Геометрический смысл интеграл это площадь области под кривой $f(x)$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lambda(B_f) = \text{площадь } B_f$$

Строим послед. независимых случ величин $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ равном. распр. на $[0,1]$

Определим

$$Z_i = \begin{cases} 1, \text{ если } f(X_i) > Y_i \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$P(Z_i = 1) = P(f(X_i) > Y_i) = P((X_i, Y_i) \in B_f) = \text{площадь } B_f = \int_0^1 f(x)\,dx$$

X_i, Y_i незав и равн. распред. на $[0,1]$ $\Rightarrow$ (X_i, Y_i) равн. распр внутри квадрата

$\mathbb{E} Z_i = \int_0^1 f(x)\,dx$, $\quad DZ_i \le 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{DZ_k}{k^2} < \infty$

$\mathbb{E} Z_i = P(Z_i = 1)\cdot 1 + P(Z_i = 0)\cdot 0 = P(Z_i = 1)$

т.к. всего 2 знач: 0 и 1

$\Rightarrow$ по УЗБЧ:

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} - \frac{\mathbb{E}Z_1 + \dots + \mathbb{E}Z_n}{n} \to 0$$

$\mathbb{E}Z_1 = \mathbb{E}Z_2 = \dots = \mathbb{E}Z_n \Rightarrow \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} - \underbrace{\frac{n \mathbb{E}Z_i}{n}}_{\mathbb{E}Z_i}$

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} - \int_0^1 f(x)\,dx \to 0$$

$$\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{n} \to \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{п.н.}$$

Проблемы: ① Как мы строим послед. независимых случ. величин?
вопросы

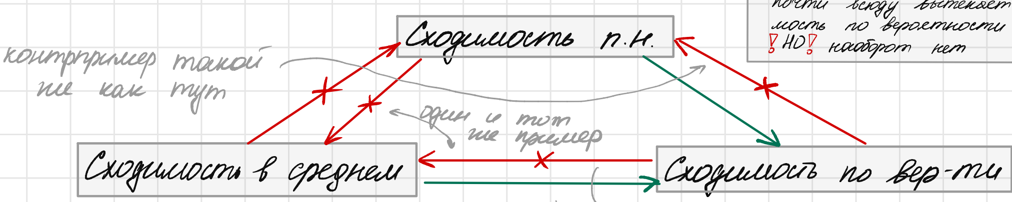
② А с какой скоростью имеет место это сходимость? Чтобы получить точность интеграла до 0,01, сколько нужно взять реализаций?

Но это проблемы не нашего курса

Опр: Послед случ величин $\{X_n\}$ сходится к случ. величине X в среднем порядка $\alpha>0$, если

$$\mathbb{E}(|X_n-X|^\alpha)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Замечание: Из сходимости почти всюду вытекает сходимость по вероятности !НО! наоборот нет

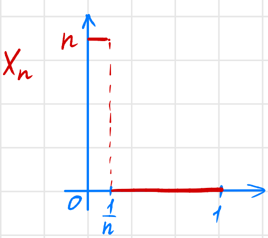


По нер-ву Маркова $\forall\varepsilon>0$

$$P(|X_n-X|>\varepsilon)\le\frac{\mathbb{E}|X_n-X|^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$$

Если есть сх. в среднем, то $\mathbb{E}|X_n-X|^\alpha\to0\Rightarrow$
$\dfrac{\mathbb{E}|X_n-X|^\alpha}{\varepsilon^\alpha}\to0\Rightarrow P(|X_n-X|>\varepsilon)\to0$
$\Rightarrow$ есть сход. по вер-ти

Пример: Пусть $\Omega=[0,1)$
$\mathcal{F}=\mathcal{B}$ - борел.
$P=\lambda$ - мера Лебега



$X_n\to0$ почти всюду $\Rightarrow$ по вероятности
но не сход в средн.

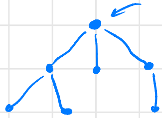
В качестве пред. величины у нас может быть только $X=0$

$\mathbb{E}|X_n-X|=\mathbb{E}X_n=n\cdot\frac{1}{n}=1\Rightarrow$ к 0 не стремится

Производящие функции

Пример: Задача об исчезновении фамилий

Предположим, что у нас есть некий прапрапрапрапрадед, у которого есть какая-то фамилия, допустим Иванов и допустим, что эта фамилия передается только по сыновьям. Значит у этого прапрапрапрапрадеда с какой-то вероятностью появляются сыновья, но могут и не появиться



Но может все печально закончится, в том смысле, что сыновей в каком-то поколении вообще нет $\Rightarrow$ фамилия выродилась

Нам понадобятся производящие функции – это инструмент для работы с целочисленными случ величинами

Фиксируем, что мы работаем сейчас с целочисленными неотрицательными случайными величинами

Опр: Пусть случ. вел. $X \geq 0$ и целоч. Производящей функцией случ вел X назыв. функция определяемая следующей формулой:

$$\varphi(s) = \mathbb{E} s^X, \text{ где } s \text{ - компл } |s| \leq 1$$

$|s^X| \leq 1 \Rightarrow \forall X \geq 0$ и целоч. произв. функция существует

Св-ва производящих функций:

$\varphi(s) = \mathbb{E}s^X = p_0 + p_1 \cdot s + p_2 \cdot s^2 + \ldots$

$X: \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \ldots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \ldots \end{matrix}$ ← набор значений / ← их вероятности

Если мы знаем $\varphi(s)$, мы можем найти значение p_i?

$p_0 = \varphi(0)$

$p_1 = \varphi'(0)$

...

$$\boxed{p_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}}$$ ← связь произв. функции и вероятности p_k

Следствие: Производящая функция однозначно определяет распределение случайной величины X

Пример: Пусть $X \sim Be(p)$

$$X = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & q = 1-q \end{cases}$$

$\varphi(s) = q + ps$

$Y \sim Binom(n,p)$, $Y \overset{d}{=} X_1 + \ldots + X_n$ ← по распределению; $\{X_i\}$ - незав. $\sim Be(p)$

$\Downarrow$

$\varphi_Y(s) = \mathbb{E}s^Y = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}s^{X_k} = (q+ps)^n$

$Y = X_1 + \ldots + X_n \Rightarrow s^{X_1 + \ldots + X_n} = s^{X_1} \cdot s^{X_2} \cdot \ldots \, s^{X_n}$

$\Rightarrow \mathbb{E}s^{X_1 + \ldots + X_n} = \mathbb{E}s^{X_1} \cdot \mathbb{E}s^{X_2} \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}s^{X_n}$

случ. велич. независ.

Пример: Пусть $Z \sim Pois(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}s^Z = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k \lambda^k}{k!}}_{= e^{\lambda s}} e^{-\lambda} = e^{\lambda s - \lambda} = e^{\lambda(s-1)}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$

Лекция №13

Напоминание:

Пусть $X \geq 0$ и целочисленная случ велич. Производящая функция этой случ. величины:

$$\varphi(z) = \mathbb{E} z^X, \quad |z| \leq 1$$

$X \sim Pois(\lambda) \Rightarrow \varphi(z) = \exp\{\lambda(z-1)\}$

$\Leftarrow$ в обратную сторону тоже действует

св-во произв функции

$X_i \sim Pois(\lambda_i)$ $\quad \varphi_{X_1+X_2}(z) = \varphi_{X_1}(z) \cdot \varphi_{X_2}(z) = \exp\{(\lambda_1+\lambda_2)(z-1)\}$

$i = 1,2$ $\quad X_i$ - незав.

$$\mathbb{E} z^{X_1+X_2} = \mathbb{E} z^{X_1} \cdot z^{X_2} \underset{\text{т.к. незав.}}{=} \mathbb{E} z^{X_1} \cdot \mathbb{E} z^{X_2}$$

$\Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$

Если случ. велич X целоч, то ее мат. ожидание:

$\mathbb{E}X = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \ldots = \varphi'(1)$

$\varphi(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$

Пример: (Задача о числе животных)

Есть некая территория, на этой территории живут самки с детенышами. Этих самок на этой территории N штук.

N - случайная величина

X_i - количество детенышей у i-й самки

X_i - случайные величины, причем они независимы и одинаково распределены

$N, X_1, X_2, \ldots$ - незав случ велич.

Они все неотр. и целочисленны

$\Rightarrow$ у всех есть производящие функции

Для N: $\varphi_N(z)$, для X_i: $\varphi(z)$ $\leftarrow$ одинаковая, т.к. они одинаково распределены

Сколько детенышей на территории?

Общее число детенышей: $X_1 + X_2 + \ldots + X_N = S_N$

Допустим нас интересует производящая функция этой случайной величины: $\varphi_{S_N}(z)$ – ?

$$\varphi_{S_N}(z) = \mathbb{E}\, z^{S_N}$$

Если бы N не была случ. величиной, то $\mathbb{E}\, z^{S_N} = \varphi^N(z)$

по св-ву мультипликативности $\varphi_{X_1+X_2}(z) = \varphi_{X_1}(z)\cdot\varphi_{X_2}(z)$

$$\mathbb{E}\, z^{S_N}\cdot 1 = \mathbb{E}\, z^{S_N}\left(\mathbb{1}_{\{N=1\}} + \mathbb{1}_{\{N=2\}} + \ldots\right) \circledequal$$

$$z^{S_N}\cdot \mathbb{1}_{\{N=k\}} = \underbrace{z^{S_k}}_{\text{сл. вел.}}\cdot\underbrace{\mathbb{1}_{\{N=k\}}}_{\text{сл. вел.}}$$

, но $N, X_1, \ldots, X_n$ - незав => z^{S_k} и $\mathbb{1}_{\{N=k\}}$ независ.

=> $\mathbb{E}\, X\cdot Y = \mathbb{E}\, X\cdot \mathbb{E}\, Y$

$$\circledequal \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\, z^{S_k}\cdot \mathbb{E}\, \mathbb{1}_{\{N=k\}} =$$

произв. функция; вероятность события $N=k$

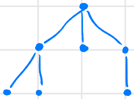
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k(z)\cdot P(N=k) = \varphi_N(\varphi(z))$$

если сравнить эти представления

$$\varphi(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$$

Вывод: $S_N = X_1 + \ldots + X_N$, то $\varphi_{S_N}(z) = \varphi_N(\varphi(z))$ (1)

Пример: Задача об исчезновении фамилии (продолжение)



S_1 – число сыновей в 1 поколении

S_2 – число сыновей во 2 поколении

...

X - число сыновей (случайная величина) с производящей функцией $\varphi(z)$

Вырождение фамилии в поколении n или раньше:

$\underbrace{\{S_n = 0\}}_{A_n}$ - событие: в n-том поколении нет сыновей

Как связаны A_n и A_{n+1}?

$A_n \subset A_{n+1}$ (если никого нет в n-ом поколении, то n+1 точно никого не будет)

$\Rightarrow \{A_n\}$ - монотонная последовательность

A - событие, описывающее вырождение фамилий

$A = \cup A_n = \lim A_n \Rightarrow$ из св-ва непр. вероятности

$$\underbrace{P(A)}_{y} = \lim \underbrace{P(A_n)}_{y_n}$$

не убывая сходится к

$y_n \uparrow y$

Наша задача понять чему равен y: $y = ?$

Вспомогательная задача: $\mathbb{E}S_n - ?$ (сколько у нас потомков в n-ом поколении в среднем)

Если случ. велич. X целоч., то ее мат. ожидание:
$\mathbb{E}X = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \dots = \varphi'(1)$
$\varphi(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$

Если мы знаем производящую функцию S_N, то чтобы найти мат. ожидание, возьмем производную в единице

$\mathbb{E}S_1 = \mathbb{E}X = m = \varphi'(1)$

сколько в среднем порождает прапрапрародитель, т.е. одна частица

$S_{n+1} = X_1 + X_2 + \dots + X_{S_n}$ В n-ом поколении S_N частиц, каждая из этих частиц порождает какое-то кол-во сыновей

Вывод: $S_N = X_1 + \dots + X_N$, то $\varphi_{S_N}(z) = \varphi_N(\varphi(z))$ (1)

$$\varphi_{S_{n+1}}(z) = \varphi_{S_n}(\varphi(z))$$

кол-во частиц в S_{n+1}

Обозначение: $\varphi_n(z) = \varphi_{S_n}(z)$

$\Rightarrow \quad \varphi_{n+1}(z) = \varphi_n(\varphi(z))$

Для $n=2$:

$$\varphi_2(z)=\varphi(\varphi(z))$$

Для $n=3$:

$$\varphi_3(z)=\varphi_2(\varphi(z))=\varphi(\underbrace{\varphi(\varphi(z))}_{\varphi_2(z)})=\varphi(\varphi_2(z))$$

индекс ушел внутрь

По индукции:

$$\varphi_{n+1}(z)=\varphi(\varphi_n(z)) \quad (2)$$

$$\varphi_{n+1}'(z)=\varphi'(\varphi_n(z))\cdot\varphi_n'(z)$$

$$\mathbb{E}S_2=\varphi_2'(1)=\varphi'(1)\cdot\varphi'(\varphi(1))=[\varphi'(1)]^2=m^2$$

$\varphi(1)=1$ $\qquad$ $\mathbb{E}S_1=\mathbb{E}X=m=\varphi'(1)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}S_n=m^n$$

Рассмотрим 3 случая:

1. Если $m<1$, то $\mathbb{E}S_n\to 0$ при $n\to\infty$
   $\Rightarrow$ вер-ть вырождения $y=1$

2. Если $m>1$, то $\mathbb{E}S_n\to+\infty$ при $n\to\infty$
   $\Rightarrow$ вер-ть вырождения $y=?$ $\quad\boxed{y=0 \text{ неверно!}}$

3. Если $m=1$, то $\mathbb{E}S_n=1$
   $\Rightarrow$ вер-ть вырождения $y=1$

Все ответы получены в нетривиальных предположениях:
$0<p_0=P(X=0)<1$

вероятность того, что у нас 0 сыновей

Это задача - простейшая задача из теории ветвящихся процессов

Процесс, который мы описали это ветвящийся процесс Гальтона - Ватсона строгий знак

Теорема: Пусть p_0: $0 < p_0 < 1$. Тогда

нетривиально

1. Если $m = \mathbb{E}X \le 1$, то $y = 1$
2. Если $m > 1$, то y: $0 < y < 1$

Док-во:

$$y = \lim y_n = \lim P(S_n = 0) = \lim \varphi_n(0)$$

y_n – вероятность того, что $S_n = 0$

В силу соотношения (2) $\varphi_{n+1}(z) = \varphi(\varphi_n(z))$

$$\varphi_{n+1}(0) = \varphi(\varphi_n(0))$$

$$y_{n+1} = \varphi(y_n)$$

φ – непрерывно, n устремляем к ∞:

$$y = \varphi(y) \quad (3)$$

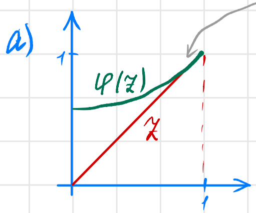
Если вспомним, что $\varphi(1) = 1$, то $y = 1$ всегда будет решением

Решением (3) является $y = 1$

Осталось понять, что:

- В случае когда $m \le 1$ никаких других решений нет
- В случае $m > 1$ оказывается есть еще одно решение

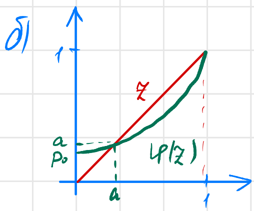
$y = \varphi(y) \leftarrow$ графически изобразим это уравнение



Левая часть это y, т.е прямая

Правая часть это $\varphi(y)$ – производящая функция

Заметим, что $\varphi(z)$ при действ. z от 0 до 1 это выпуклая функция, т.к. $\varphi''(z) \ge 0$



Мы обязаны попасть при $z = 1$ в единицу, но в случае а) мы всегда находимся выше этой биссектрисы, а в случае б) у нас есть пересечение, но т.к. это выпуклая функция, оно единственное а) $\forall z: \ 0 \le z < 1 \quad \varphi(z) > z$

$-\varphi(z) < -z$

$$1 - z > \underset{\varphi(1)}{1} - \varphi(z) \quad \Big| : 1 - z$$

$$1 > \frac{\varphi(1) - \varphi(z)}{1 - z}$$

$\Downarrow \ z \to 1$ (устремляем z к 1)

$$m = \varphi'(1) \le 1$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{\varphi(1) - \varphi(z)}{1 - z}$$

Если прямая и $\varphi(z)$ пересекаются в одной точке $(1, 1)$ в этом случае значение $m \le 1$

б) $y_1 = P(X = 0) = p_0$

вероятность вырождения в первом же поколении

$y_2 = \varphi(\varphi(0)) = \varphi(y_1)$

$y_1 = p_0 < a$

$\Rightarrow \ y_2 = \varphi(y_1) < \varphi(a) = a$

$\Rightarrow$ по индукции, использ. (2): $\varphi_{n+1}(z) = \varphi(\varphi_n(z))$

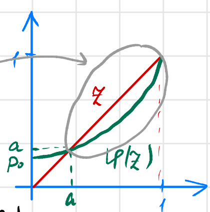
$y_n < a \quad \forall n$

$\Rightarrow$ Решением уравнения (3) $y = \varphi(y)$ может быть только $y = a$

Вер-ть вырожд. $y = a$

Для $z: \ a < z < 1$

$z > \varphi(z)$



$\underset{=1}{\varphi(1)} - \underset{=a}{\varphi(a)} = \varphi'(\theta)(1 - a)$ ← теорема Лагранжа $\theta \in (a, 1)$

$1 - a = \varphi'(\theta)(1 - a)$

$\varphi'(\theta) = 1 \qquad \theta: 0 < \theta < 1 \qquad \varphi'(z)$ - возраст.

$m = \varphi'(1) > 1$

$\varphi'(\theta)$"

Замечание:

Если $p_0 = 0$, это означает, что $y_1 = P(X=0) = 0 \Rightarrow$ всегда кто-то родился $\Rightarrow y = 0$, т.е. вырождения не происходит

Если $p_0 = 1$, то $y_1 = P(X=0) = 1 \Rightarrow$ все закончилось в самом начале, никто не родился $\Rightarrow y = 1$

Далее, X - произвольная случайная величина

Характеристические функции

X - случайная величина $\quad$ $\forall$ случ вел характ функция существует

Опр: $\underset{t \in \mathbb{R}}{f(t)}$ — характеристическая функция, определяется на прямой, как:

$$f(t) = \mathbb{E} e^{itX}$$

, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица

Аргумент действительный, значение комплексное

Если $X \geq 0$, целочисл, то $\varphi(z) = \mathbb{E} z^X$

если $e^{it} = z$, то получится $f(t) = \varphi(e^{it})$

$$\mathbb{E}e^{itX} = \int_{\Omega} e^{itX(\omega)} P(d\omega) = \overbrace{\int_{\mathbb{R}}}^{\text{интеграл Лебега - Стилтьеса}} e^{its} \underbrace{P_X}_{\text{распределение случ велич } X}(ds)$$

Частные случаи:

- Если X ~ дискретная $\quad$ значения: $a_1, a_2, \ldots$ с вер-ми: $p_1, p_2, \ldots$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ita_k} p_k$$

← сходится, т.к. он мажорируется сх. рядом

$|e^{ita_k}| = 1$

• Если X имеет абс. непрерывное распределение, то $\exists$ плотность $h(s)$

Тогда

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{its} \underbrace{h(s)}_{\geqslant 0} ds \leftarrow \text{сходится}$$

$\geqslant 0$ как плотность

$$|e^{its}| = 1$$

Подынтегральная функция мажорируется чем-то, от чего интеграл существует

Св-ва характеристических функций:

1. $f(0) = 1$, т.к. $\mathbb{E} e^0 = \mathbb{E} 1 = 1$

   $|f(t)| \leqslant 1$, т.к. $|\mathbb{E} e^{itX}| \leqslant \mathbb{E} |e^{itX}| = \mathbb{E} 1 = 1$

2. $f_{\underbrace{aX+b}}(t) = e^{itb} f_X(at)$ вытекает из опр. и св-в мат. ожид.

   линейное преобр. сл. вел. X

3. Если X_1, X_2 - независ., то $f_{X_1+X_2}(t) = f_{X_1}(t) \cdot f_{X_2}(t)$

   док-во такое же как для произв. функций

Лекция №14

Напоминание:

Если X - случ величина, то характер. функция

функция действительного переменного t

$f(t) = \mathbb{E} e^{itX}$ ← комплекснозначная

$\forall$ случ. величины характерист. функция определена, т.к. такое мат. ожидание существует всегда

Св-ва характеристических функций: (продолжение)

4. $f(t)$ - равномерно непрерывна

Док-во:

Возьмем $|f(t+h) - f(t)|$, надо показать, что для $\forall$ наперед заданного ε, если h мало, то независимо от t эта разность не будет превосходить ε

выносим общ. множ.

$$|f(t+h) - f(t)| \underset{\text{по опр.}}{=} |\mathbb{E} e^{i(t+h)X} - \mathbb{E} e^{itX}| = |\mathbb{E} e^{itX}(e^{ihX} - 1)| \le$$

св-во линейности, модуль вносим

$$\le \mathbb{E} \underbrace{|e^{itX}|}_{=1} |e^{ihX} - 1| = \mathbb{E}|e^{ihX} - 1| = \mathbb{E}|e^{ihX} - 1| \cdot 1 =$$

$$= \mathbb{E}|e^{ihX} - 1| \cdot (\mathbb{1}_{\{|X| < A\}} + \mathbb{1}_{\{|X| \ge A\}}) \le$$

$$e^{iah} - 1 = ih \int_0^a e^{izh} dz$$

$$|e^{iah} - 1| \le \begin{cases} 2 = |e^{iah}| + |1| \\ |ha| = |ih| \int_0^a |e^{izh}| dz = |h| \cdot \int_0^a dz \end{cases}$$

($|e^{iah}| = 1$, $|ih| = |h|$, $|e^{izh}| = 1$)

$$\Rightarrow |e^{iah} - 1| \le \min(2, |ha|)$$

$\leq$ На первом индикаторе $|X|<A \Rightarrow \mathbb{E}\,\underbrace{|e^{ihX}-1|}_{\leq |hX|}\cdot \mathbb{1}_{\{|X|<A\}} \leq |h|\cdot A$

На втором индикаторе: $|e^{ihX}-1|\leq 2$ $\quad \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{|X|\geq A\}} = P(|X|\geq A)$

$$\leq |h|\cdot A + 2\cdot \underbrace{P(|X|\geq A)}_{\downarrow 0 \text{ при } A\to\infty}$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists A_0(\varepsilon)>0\ \forall A: |A|>A_0\ |P(|X|\geq A)-0|<\frac{\varepsilon}{4}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists A_0: \ \forall A\geq A_0 \quad |f(t+h)-f(t)|\leq |h|\cdot A_0 + \frac{\varepsilon}{2}$

Если вставить $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2A_0}: \ \forall |h|<\delta$

$$|f(t+h)-f(t)|\leq |h|\cdot A_0 + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

5. Пусть $\exists\ \mathbb{E}X^n$ при n - целом (момент порядка n)
Тогда • $\exists$ n-кратная производная у $f(t)$
• $f^{(n)}(0) = i^n\,\mathbb{E}X^n$

Док-во:

Нужна вспомогательная теорема

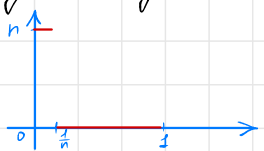
Теорема Лебега: (о предельном переходе под знаком мат. ожидания (интеграла!))

Пусть $\{X_n\}$ посл. случ. величин
$X_n \to X$ (случ. велич) почти всюду и $\exists$ случ. велич. $Y\geq 0$
такая, что $|X_n|\leq Y$ почти всюду и $\exists\,\mathbb{E}Y$
Тогда $\mathbb{E}\underbrace{X}_{\lim X_n} = \lim \mathbb{E}X_n$ (без док-ва)

$\mathbb{E}\lim X_n$

Пример: Пусть $\Omega=[0,1)$
$\mathcal{F}=\mathcal{B}$ - борел.
$P=\lambda$ - мера Лебега

Пусть случ. величины X_n - это функции такого вида:



$$\mathbb{E}X_n = n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot 0 = 1 \quad \forall n$$

Но $X_n \to 0$ почти всюду

$\Rightarrow \mathbb{E} \lim X_n = 0$ $\qquad 0 \neq 1 \Rightarrow \lim \mathbb{E} X_n \neq \mathbb{E} \lim X_n$

Не выполняется теорема Лебега, т.к. не выполнено условие $\exists$ сл. вел. $Y \geqslant 0$: $|X_n| \leq Y$

Мы не можем найти такую сл. вел. Y, которая мажорировала бы любую сл. вел X_n

Док-во продолжение 5 св-во

Докажем только при $n=1$, остальное по индукции

Надо док-ть, что если $\exists\, \mathbb{E}X$, то $\exists$ производная у $f(t)$ и $f'(0) = i\,\mathbb{E}X$

По определению производная:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Если при стремлении $h \to 0$ у нас предел существует, то это и есть производная в точке t

Вспомним, что $\mathbb{E} g(X) = \int_{\mathbb{R}} g(z)\, dF(z)$ (интеграл Лебега-Стилтьеса; F — функц. распр.)

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \int_{R} e^{itz} \frac{e^{ihz} - 1}{h}\, dF(z)$$

(сл. вел. X)

$f(t) = \mathbb{E} e^{itX}$

$f(t+h) = \mathbb{E} e^{i(t+h)X} \Rightarrow \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = \dfrac{\mathbb{E} e^{i(t+h)X} - \mathbb{E} e^{itX}}{h} =$

$$= \frac{\mathbb{E} e^{itX}(e^{ihX} - 1)}{h}$$

Надо понять, можем ли мы переходить к пределу под знаком интеграла

Обозначим: $\frac{e^{ihz}-1}{h} = \alpha_n(z)$

Рассмотрим след. вероятностное пространство:
В качестве Ω выступает прямая $\mathbb{R}$, в качестве σ-алгебры выступает борелевская σ-алгебра, а в качестве P выступает вероятностная мера, которая порождается вот этой функцией распределения $F(z)$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$, где $P([a,b)) = F(b) - F(a)$

Мы доказывали, что если мы определим вероятность полуинтервала таким образом, то эта вероятность распространяется на всю борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}$, т.е. этого равенства достаточно, чтобы однозначно определить P

На этом вероятностном пространстве мы рассматриваем последовательность функций $\alpha_n(z)$ при изменении h, z выступает в данном случае как некий параметр фиксированный, а h - переменная

$\alpha_n(z)$ т.к. оно непрерывна, является случ велич. на вероятн. пространстве

$$\alpha_n(z) \xrightarrow[h\to 0]{} iz$$

$$\frac{e^{ihz}-1}{h} = \frac{i\cancel{h}\int_0^z e^{ixh}dx}{\cancel{h}} = \underbrace{i\int_0^z e^{ixh}dx}_{\downarrow h\to 0 \atop z}$$

$$\boxed{e^{iah}-1 = ih\int_0^a e^{izh}dz}$$

iz как функция от z непрерывная, то есть это есть случайная величина на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$

$\Rightarrow |\alpha_h(z)| \leq |z|$

Это вытекает из неравенства $|e^{iah} - 1| \leq \min(2, |ha|)$

По теореме Лебега, мы должны мажорировать чем-то нашу послед., что имеет мат. ожидание

но $\int\limits_{\mathbb{R}} |z|\, dF(z) < \infty$, т.к. по условию $\exists \mathbb{E}X$

$\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}|X|}$

мат. ожидание $|X|$ сущ. $\Leftrightarrow$ мат. ожидание X сущ.

$\Rightarrow$ можем применить теорему Лебега

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{itz} \frac{e^{ihz} - 1}{h}\, dF(z)}_{} \xrightarrow[h \to 0]{} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itz} iz\, dF(z)$$

устремляем h к 0

Это величина стремится к чему-то разумному

$\Rightarrow$ Предел левой части при $h \to 0$ тоже существует

$\Rightarrow \exists f'(t)$

При $t = 0$ $\quad \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itz} \frac{e^{ihz} - 1}{h}\, dF(z) \xrightarrow[h \to 0]{} i \int\limits_{\mathbb{R}} z\, dF(z) = i\mathbb{E}X$

этот мн-ль исчезает

Далее по индукции

6. Формула обращения

Вопрос: Как, зная функцию распределения, найти характеристическую функцию?

$f(t) = \mathbb{E}e^{itx}$

Характеристическая функция определяется через мат. ожидание, но если мат. ожидание записать в таком виде: $\mathbb{E}g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(z)\, dF(z)$

характ. функция $\qquad$ интеграл, опред. $F(z)$

И наоборот? Пусть известна характеристическая функция, можем ли мы зная ее найти функцию распределения?

Пусть F-функция распределения случ. величины X.
Для $\forall a<b$, где a, b - точки непр. F справедливо следующее соотношение:

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\cdot f(t)\,dt$$ (без док-ва)

Если a устремить к $-\infty$, то $F(a)\to 0$ =>
мы можем получить результат просто для $F(b)$

a, b - точки непр. F
Точек разрыва у функции распределения не более, чем счетно
А на прямой континуум => Почти все точки - точки непрерывности

Мы знаем всю функцию распределения, если мы знаем по формуле обращения, как она себя ведет в точках непрерывности, потому что функция распределения непрерывна слева и к любой точке мы можем двигаться слева по точкам непрерывности и в пределе получить значение функции распределения и в этой точке (точке разрыва)

Утв: Любая характеристическая функция однозначно определяет функцию распределения случайной величины
Вытекает из формулы обращения

Пример: Как найти характеристическую функцию для стандартного нормального закона?

$X \sim N(0,1)$

Характ. функция

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}_{\text{плотность}} dz$$

← можно воспринимать, как обычный интеграл Римана по прямой (неогр. области инт.)

$$\varphi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i z e^{itz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} =$$

Легко убедиться, что дифф. можно внести под знак интеграла

по частям

$$= t\varphi(t)$$

$$\begin{cases} \varphi'(t) = t \cdot \varphi(t) \\ \varphi(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Теперь рассмотрим случ велич. Y

$Y \sim N(a, \sigma^2)$

мат. ожид.

дисперсия

по распределению

$Y \overset{d}{=} a + \sigma X$

станд. нормальное

$\boxed{2. \ f_{aX+b}(t) = e^{itb} f_X(at)}$

$\Downarrow$ по св-ву 2 характ. функции

$$f_Y(t) = e^{ita} \cdot \varphi(\sigma t) = e^{ita} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Пусть теперь есть $Y_j \sim N(a_j, \sigma_j^2)$, $j = 1,2$

две случайные величины

Y_1, Y_2 - независимы $\Rightarrow f_{Y_1+Y_2}(t) = f_{Y_1}(t) \cdot f_{Y_2}(t)$

по св-ву 3

$$f_{Y_1+Y_2}(t) = e^{ita_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} \cdot e^{ita_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{it(a_1+a_2) - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

$\Rightarrow$ характ функция нормального закона с параметрами $a_1 + a_2$, $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ $\quad N(a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Т.к у нас есть взаимно однозн. соотв между характ. функциями и распределениями $\Rightarrow$ то сумма ничего другого кроме как нормальное распределение иметь не может

$\Rightarrow$ Складывая нормально распределенные случайные величины, мы получаем нормальное распределение

Справедлив более общий факт:

Пусть $Y_j \sim N(a_j, \sigma_j^2)$ $\quad j = 1, 2, \dots, n$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ - независимы

$\Rightarrow$ $\alpha_1 Y_1 + \dots + \alpha_n Y_n$ имеет норм распределение

$$N\left(\sum_1^n \alpha_i a_i, \sum_1^n \alpha_i^2 \sigma_i^2\right)$$

7. Расширенное св-во хар функций

О взаимно непрерывном соответствии характеристических функций и функций распределения

Если есть послед. характ. функций, которые сходятся к какой-то характеристической функции, что будет происходить с соотв. функциями распределения?

И обратный вопрос: если у нас F_N куда-то сходится, к какой-то функции, что будет происходить с характ. функциями?

Возникает вопрос: в каком смысле сходится последовательность характеристических функций, и в каком смысле сходится послед. функций распределения?

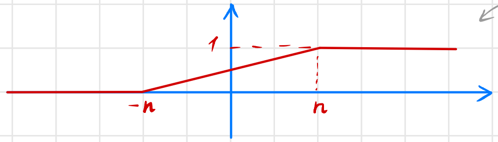
Опр: Пусть есть послед. функций распределения $\{F_n\}$. Будем говорить, что F_n слабо сходится к функции F, если $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ в $\forall$ точке непр. x функции F

Обозн: $F_n \Rightarrow F$

Вопрос: каким набором св-в обладает предел F?

Мы знаем, что
- F_n - монотонна $\Rightarrow$ F будет монотонна сохранилось
- F_n в пределах от 0 до 1 $\Rightarrow$ F так же сохр.
- F_n на $-\infty$ это 0, F_n на $+\infty$ это 1 $\Rightarrow$!НО! это св-во не сохранится

Пример: Пусть функция $F_n(x)$ имеет такой вид



Это функция распределения, т.к. все св-ва выполнены $\forall n$

Это функция распределения равномерного закона на отрезке $[-n; n]$

$F_n \longrightarrow F \equiv \frac{1}{2}$

Вывод: F - может быть не функцией распределения

Опр: Послед. случ величин $\{X_n\}$ слабо сход. к случ вел. X, (или сход по распределению) если $F_n \Rightarrow F$, где F_n и F - это функц. распределения случ. величин X_n и X соотв.

Обозн: $X_n \Rightarrow X$

Лекция №15

Обозначения:

Послед. случ величин $\{X_n\}$, которым отвечают функции распределения $\{F_n\}$ и характеристические функции $f_n(t)$

Слаб. сход. $F_n \Rightarrow F \iff F_n(x) \to F(x)$ $\forall$ т. непр. x функции F

Слаб сход. $X_n \Rightarrow X$, если $F_n \Rightarrow F$, где F - ф. распр.

Теорема о непрерывном соответствии функц. распр. и характ. функции

Теорема 1 (Прямая) без док-ва

Если $\{F_n\}$ - послед. функций распределения, такая что $F_n \Rightarrow F$ - ф. распр., то $f_n(t) \to f(t)$ $\forall t$ (поточечно) и $f(t)$ - характ. функция, соотв. F

Утв. вытекает из 2-й теоремы Хелли

Вторая теорема Хелли без док-ва

Пусть g - непр., огранич. функция и $F_n \Rightarrow F$ - ф. распр.
Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dF_n \to \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dF$$

интегралы Лебега-Стилтьеса

Это более сильный результат

Напоминание:

$$f(t) = \mathbb{E}e^{itx} = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\,dF + i\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\,dF$$

функция распр. X

Из этого представления и 2-й теоремы Хелли следует теорема 1 (Прямая)

Но для нас важнее обратная теорема

Теорема 2 (Обратная)

Если $\{f_n(t)\}$ – послед. характ. функций и $f_n(t) \to f(t)$ $\forall t$ и $f(t)$ непр. в 0 ← отличие от прямой теоремы

поточечно

Тогда $F_n \Rightarrow F$ и F - есть функция распр. с хар. ф. $f(t)$

послед. соотв. функций распределения

Вспомогательные утверждения:

Лемма 1: достаточное условие для слабой сходимости функций распределения

Пусть D - всюду плотное мн-во в $\mathbb{R}$.
Если $F_n(x) \to F(x)$ $\forall x \in D$, то $F_n \Rightarrow F$

← не обязана принадлежать D

Док-во: Пусть x - точка непрерывности функции F.
Возьмем $x_1, x_2 \in D$: $x_1 \le x \le x_2$
Т.к. F_n - функция распределения:
Из монотонности F_n: $F_n(x_1) \le F_n(x) \le F_n(x_2)$
Переходим к пределу при $n \to \infty$:

← что происходит, мы не знаем, предела может не быть, но нижний и верхний пределы точно есть

$$F_n(x_1) \le F_n(x) \le F_n(x_2)$$

$n \to \infty$ $\quad$ $n \to \infty$

$$F(x_1) \le \underline{\lim} F_n(x) \le \overline{\lim} F_n(x) \le F(x_2)$$

x – точка непрерывности, мы заключили нижние и верхние пределы $F_n(x)$ значениями $F(x_1)$ и $F(x_2)$, но это любые точки из окрестности x, а x это точка непрерывности
=> Для нижнего и верхнего предела ничего не остается, как равняться друг другу

x – точка непрерывности и мн-во всюду плотное:

$$F(x_1) \le \underline{\lim} F_n(x) \le \overline{\lim} F_n(x) \le F(x_2)$$

$\Downarrow$

$$\underline{\lim} F_n(x) = \overline{\lim} F_n(x) = \lim F_n(x) = F(x)$$

Первая теорема Хелли:

Из любой послед. функций распределения $\{F_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$: $F_{n_k} \Rightarrow F$

Замечание: F не обязательно функция распределения

Док-во: Для начала выделим всюду плотное мн-во:
Возьмем $D = \mathbb{Q}$ - мн-во рациональных точек на $\mathbb{R}$
всюду плотное мн-во

Это мн-во счетно => можем их занумеровать:
$D = \{x_1, x_2, \dots\}$

Рассмотрим нашу последовательность F_n в точке x_1:
$\{F_n(x_1)\} \leftarrow$ это последовательность чисел на отрезке $[0,1]$
Из этой последовательности мы можем выделить сходящуюся подпоследовательность, т.к. это ограниченная последовательность чисел

Выделяем подпослед. $\{F_{1n}(x_1)\}$: $F_{1n}(x_1) \longrightarrow$ сходится как числ. посл.
а предел обозначим, как значение какой-то функции $F(x_1)$

Далее повторим эту процедуру, но уже возьмем последовательность $\{F_{1n}\}$, которая сходится в т. x_1, рассмотрим эту последовательность в т. x_2 и из нее выделяем сходящуюся подпоследовательность и т.д.

$F_{11}(x_1) \quad F_{12}(x_1) \quad F_{13}(x_1) \quad \dots \quad \to F(x_1)$

$F_{21}(x_2) \quad F_{22}(x_2) \quad \dots \quad \to F(x_2)$

$F_{31}(x_3) \quad F_{32}(x_3) \quad F_{33}(x_3) \quad \dots \quad \to F(x_3)$

Для подпосл. $\{F_{nn}\}$, которую мы составили из диагональных элементов, мы имеем: $F_{nn}(x) \to F(x)$ $\forall x \in D$

и по лемме 1: $F_{nn} \Rightarrow F$

Об определении F: Пока оно определено только для элементов $x \in D$, а надо определить для всех $x \in \mathbb{R}$

Любая функция распределения обладает св-вами:
- монотонность
- непрерывность слева
- на $-\infty$ 0
- на $+\infty$ 1

Функция F обладает первыми 2-мя св-вами точно

$\forall x \notin D$ положим $F(x) = \lim\limits_{\substack{x_i \uparrow x \\ x_i \in D}} F(x_i)$ т.к. D всюду плотное, такую послед. x_i мы можем получить

слева приближаются к x

Лемма 2 Пусть X - случ. величина.

Для $\forall \tau > 0$: $$\underbrace{P\left(-\frac{2}{\tau} \leq X < \frac{2}{\tau}\right)}_{A} \geqslant 2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| - 1 \quad (1)$$

где $f(t)$ - характ. функция случ. величины X

$$P\left(-\frac{2}{\tau} \leq X < \frac{2}{\tau}\right) \geqslant 2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| - 1$$

почему мы здесь не сократили 2?

Ответ: Что происходит, когда $\tau \to 0$?

Если $f(t)$ - характ. функция, то $f(0) = 1$, т.е. при $\tau \to 0$

$$\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt \xrightarrow[\tau \to 0]{} 1 \qquad 2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| - 1 \xrightarrow[\tau \to 0]{} 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$f(t) \to 1$, $\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt \to 2\tau$

Т.е. это неравенство будет использовано, чтобы показать, что функция, которая возникает как предел подпоследовательности в 1-й теореме Хелли, является функцией распределения

Док-во:

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}\,dF(z)\right)dt\right|$$

$$\xrightarrow{\text{по опр.}} \overset{\shortparallel}{\mathbb{E}e^{itX}}$$

Если бы F имела плотность p, то интеграл можно было бы записать так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}\,dF(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} p(z)\,dz$$

← интеграл Римана

В силу того, что $|e^{itz}| = 1$, т.е. в качестве подынтегральной функции у двойного интеграла у нас выступала бы $p(z)$, которая интегрируема на прямой с одной стороны, а с другой стороны интегрирование по переменной t идет на ограниченном отрезке $[-\tau, \tau]$, а это означает, что мы можем поменять порядок интегрирования

$$\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz}\,dF(z)\,dt\right| = \left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\tau}^{\tau} e^{itz}\,dt\right)dF(z)\right| =$$

теорема Фубини (поменять порядок интегриров.)

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\tau}\cdot\frac{2\sin\tau z}{z}\,dF(z)\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\tau z}{\tau z}\,dF(z)\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\tau z}{\tau z}\,dF(z)\cdot 1\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\tau z}{\tau z}\,dF(z)\cdot\left(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}\right)\right|$$

$A: |\tau X| \le 2$

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{itz}\,dt =$$

$$= \int_{-\tau}^{\tau} \cos tz + i\sin tz\,dt =$$

$$= \int_{-\tau}^{\tau}\cos tz\,dt + \underbrace{i\int_{-\tau}^{\tau}\sin tz\,dt}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

т.к. неч. функ.

$$= \sin tz\cdot\frac{1}{z}\Big|_{-\tau}^{\tau} =$$

$$= \frac{\sin\tau z + \sin\tau z}{z} = \frac{2\sin\tau z}{z}$$

На A: $\frac{\sin \tau z}{\tau z} \le 1$ На A^c: $|\tau x| > 2 \Rightarrow \frac{\sin \tau z}{\tau z} < \frac{1}{2}$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \tau z}{\tau z} dF(z) \cdot (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}) \right| \le P(A) + \frac{1}{2} \underset{1 - P(A)}{\underset{\shortparallel}{P(A^c)}} = P(A) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P(A) =$$

$$= \frac{1}{2}(P(A) + 1)$$

$\Downarrow$

$$\left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} dF(z)\, dt \right| \le \frac{1}{2}(P(A)+1) \quad | \cdot 2; -1$$

$$P(A) \ge 2 \cdot \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} dF(z)\, dt \right| - 1$$

Док-во: Обратная теорема

Из $\{F_n\}$, отвеч. $\{f(t)\}$ по 1-й теореме Хелли берем подпосл. $\{F_{n_n}\}$: $F_{n_n} \Rightarrow F^*$

Главное, что надо понять: является ли F^* функцией распределения или нет

Докажем, что $F^*(+\infty) - F^*(-\infty) \ge 1$ (2)

F^* – предел функции распределения и как предел функции распределения он заключен в интервале от 0 до 1, т.е. $F^*(+\infty) - F^*(-\infty)$ не может быть больше 1, поэтому это неравенство фактически означает равенство, а это возможно только, когда $F^*(+\infty) = 1$, а $F^*(-\infty) = 0$, а значит F^* – ф. распред.

$\boxed{P\left(-\frac{2}{\tau} \le X < \frac{2}{\tau}\right) \ge 2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt\right| - 1 \quad (1)}$

Из (1) вытекает, что

$$\underset{P\left(-\frac{2}{\tau} \le X_{n_n} < \frac{2}{\tau}\right)}{\underset{\shortparallel}{F_{n_n}\left(\frac{2}{\tau}\right) - F_{n_n}\left(-\frac{2}{\tau}\right)}} \ge 2 \left| \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f_{n_n}(t)\, dt \right| - 1$$

Если устремим $n \to \infty$, а $\tau \to 0$, то

$$F^*(+\infty) - F^*(-\infty) \geq \lim \left(2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f_{nn}(t)\,dt\right| - 1\right)$$

?

Осталось объяснить, что предел можно внести внутрь интеграла, т.к. $f_{nn}(t) \to f(t)$, которая непрерывна в 0, а в 0: $f(0) = 1$

Рассмотрим вероятностное пространство:
$(\Omega, \mathcal{B}, P)$, где
- $\Omega = [-\tau, \tau]$
- $\mathcal{B}$ - борелевская σ-алгебра подмн-в Ω
- $P = \frac{\lambda}{2\tau}$, λ - мера Лебега

Нужно проверить, что P - вероятность, для этого нужно проверить св-ва, которым оно должна удовлетворять:
- должна быть неотриц, но $\frac{\lambda}{2\tau} \geq 0$ и так
- должна быть счетно-аддитивной, но это вытекает из того, что λ - счетно-аддитивна
- $P(\Omega)$ должно быть 1 : $P(\Omega) = \frac{\lambda(\Omega)}{2\tau}$, а $\lambda(\Omega)$ - длина интервала $[-\tau, \tau]$, т.е. $\lambda(\Omega) = 2\tau \Rightarrow P(\Omega) = 1$

и $f_{nn}(t)$ как непр. функция есть случ. величина на $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ и $|f_{nn}(t)| \leq 1$

$\Rightarrow$ можем применить теорему Лебега о пред. переходе под знаком интеграла

$$\Rightarrow \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f_{nn}(t)\,dt = \int_{-\tau}^{\tau} f_{nn}(t)\,dP$$

можем забыть, если непонятно

$$\lim_n \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f_{nn}(t)\,dt = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} \lim f_{nn}(t)\,dt$$

и поэтому имеем нер. (2), т.е.
F^* есть функция распределения

Мы доказали, что взяв F_n мы получаем подпослед., которая сходится к F_* и на этой подпослед. у нас предельная функция явл. функцией распред.
Почему вся послед. сходится?

Предположим, что есть подпосл. в F_n, которая не сходится слабо к F^*, тогда из нее мы выберем по 1-ой теореме Хелли подпослед., которая сходится к F^{**}:
$\exists$ подпосл. $\{F_{n'}\}$: $F_{n'} \Rightarrow F^{**}$ — ф. распр. ← док-во такое же
но $F^* \neq F^{**}$, что невозможно в силу прямой теоремы о непр. соотв.

Закон больших чисел (Хинчин)
$X_1, \dots, X_n$ - норм. один. распр., $m = \mathbb{E}X_1$
Тогда $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \longrightarrow m$
по вероятности

Будем доказывать через характ. функции

Лекция №16

Закон больших чисел (Хинчин)

Пусть есть послед. $X_1, \dots, X_n$ - независимых одинаково распред. случ величин и $\exists\, m = \mathbb{E}X_1$ т.к. они все одинаково распред., то у всех мат. ожидание одинаковое

Тогда

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} m$$

↑по вероятности

Замечание:

Чебышев:

- разнораспр. сл. вел.
- $\exists\, DX_i \le const$

более сильное условие, т.к. если сущ. момент более высокого порядка, то сущ моменты более низких порядков, но не наоборот:

$\exists\, DX \Rightarrow \exists\, \mathbb{E}X$

$\exists\, \mathbb{E}X \not\Rightarrow \exists\, DX$

- сходим. по вер-ти

Колмогоров:

- разнораспр. сл. вел.
- $\exists\, DX_i$ и $\underbrace{\sum_1^\infty \frac{DX_i}{i^2} < \infty}_{\text{сходимость ряда}}$

Если выполнено условие: $\exists DX_i \le const$, то условие $\sum_1^\infty \frac{DX_i}{i^2} < \infty$ выполнено автом., но не наоборот

- сходимость почти всюду

Док-во: Пусть $f(t) = \mathbb{E}e^{itX_1}$ ← характ. функция случ. величины X_1, но т.к. они все один распред., то это общая характ. функция

Если мы положим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, то

$$f_{S_n}(t) = f_{X_1}(t) \cdot f_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(t) = f^n(t)$$

↑по св-ву: если X_1, X_2 - незав, то $f_{X_1+X_2}(t) = f_{X_1}(t) \cdot f_{X_2}(t)$

↑но все они одинаковые

$$f_{\frac{S_n}{n}}(t) = f^n\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e}$$

↓

$f_{aX+b}(t) = e^{itb} f_X(at)$

$$e^{it}-1 = i\int_0^t e^{iy}\,dy$$

$$e^{iah}-1 = ih\int_0^a e^{izh}\,dz$$

$$|e^{iah}-1| \le \begin{cases} 2 - |e^{iah}| + |1| \\ |ha| = |ih|\int_0^a |e^{izh}|\,dz = |h|\int_0^a dz \end{cases}$$

$$\Rightarrow |e^{iah}-1| \le \min(2, |ha|)$$

$$\Downarrow$$

$$|e^{it}-1| \le \min(2, |t|) \quad (1)$$

следующий член разложения e^{it} в 0

$$e^{it}-1-\underbrace{it} = i\int_0^t (e^{iy}-1)\,dy$$

$$|e^{it}-1-it| \le \min\left(2|t|, \frac{t^2}{2}\right) \quad (2)$$

$$f(t) = \mathbb{E}e^{itX_1} = \underset{\text{добавили}}{\underline{1+itm}} + \mathbb{E}(e^{itX_1}-1-itX_1) =$$

$$\mathbb{E}e^{itX_1} - \underset{1}{\mathbb{E}1} - \underset{it\,\mathbb{E}X_1 \,=\, itm}{\mathbb{E}itX_1}$$

и вычли itm

$$= 1+itm+\mathbb{E}(e^{itX_1}-1-itX_1)\cdot 1 =$$

$$= 1+itm+\mathbb{E}(e^{itX_1}-1-itX_1)\cdot\left(\mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}} + \mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac14}\}}\right)$$

перенесем влево

$$f(t)-1-itm = \mathbb{E}(e^{itX_1}-1-itX_1)\cdot\left(\mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}} + \mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac14}\}}\right)$$

$$\left|\mathbb{E}(e^{itX_1}-1-itX_1)\cdot\left(\mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}} + \mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac14}\}}\right)\right| \le$$

$$\le \left|\mathbb{E}(e^{itX_1}-1-itX_1)\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}}\right| + \left|\mathbb{E}(e^{itX_1}-1-itX_1)\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac14}\}}\right|$$

$$\left|\mathbb{E}(e^{itX_1}-1-itX_1)\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}}\right| \le \mathbb{E}\left|e^{itX_1}-1-itX_1\right|\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}}$$

$$\left|\mathbb{E}(e^{itX_1}-1-itX_1)\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac14}\}}\right| \le \mathbb{E}\left|e^{itX_1}-1-itX_1\right|\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac14}\}}$$

нер. (2): $|e^{itX_1}-1-itX_1| \le \frac{t^2}{2}\cdot X_1^2$

$$\mathbb{E}\left|e^{itX_1}-1-itX_1\right|\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}} \le \frac{t^2}{2}\mathbb{E}X_1^2\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}}$$

нер. (2): $|e^{itX_1}-1-itX_1| \le 2|t|\cdot|X_1|$

$$\mathbb{E}\left|e^{itX_1}-1-itX_1\right|\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac14}\}} \le 2|t|\cdot\mathbb{E}|X_1|\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac14}\}}$$

$$|f(t)-1-itm| \le \frac{t^2}{2}\underbrace{\mathbb{E}X_1^2\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}}} + 2|t|\cdot\mathbb{E}|X_1|\cdot \mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac14}\}} \le$$

$$|X_1|\le|t|^{-\frac14} \Rightarrow |X_1|^2 \le |t|^{-\frac12}$$

$$\mathbb{E}\cdot\mathbb{1}_{\{|X_1|\le|t|^{-\frac14}\}} = P(|X_1|\le|t|^{-\frac14}) \le 1$$

$$\le \frac{t^2}{2}\cdot|t|^{-\frac{1}{2}} + 2|t|\cdot\mathbb{E}|X_1|\cdot\mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac{1}{4}}\}} = \underbrace{\frac{|t|^{\frac{3}{2}}}{2}}_{\text{быстрее уходит в 0, чем } t} + 2|t|\cdot\mathbb{E}|X_1|\cdot\mathbb{1}_{\{|X_1|>|t|^{-\frac{1}{4}}\}} \qquad (3)$$

надо понять, почему это мат. ожидание умнож. на индикатор уходит в 0, когда $t\to 0$
Мат. ожидание сущ., а индикатор: когда $t\to 0$
$|t|^{-\frac{1}{4}}\to\infty$
$\Rightarrow$ стоит хвост сход. интеграла
$\Rightarrow$ сомножит. уходит в 0

Из (3) следует, что $\forall$ случ. велич. X:
$f(t)$ – ее хар. функция и $m=\mathbb{E}X$:

$$f(t) = 1 + itm + \bar{\bar{o}}(t), \quad t\to 0 \qquad (4)$$

Если применить (4)

$$f_{\frac{S_n}{n}}(t) = f^n\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1 + im\frac{t}{n} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{itm}$$

всюду непрерывная функция

эта величина $\to 0$ за счет $n\to\infty$ $\Rightarrow$

Вспомним обратную теорему о непрерывном соотв. ф. распр. и хар. функциями:
Если $f_n(t)\to f(t)$ $\forall t$ и $f(t)$ непр. в 0, то
$F_n \Rightarrow F$, где F_n – ф. распр. с характ. ф. $f_n(t)$.
F – ф. распр. с характ. ф. $f(t)$

Т.к. e^{itm} есть характ. функция сл. вел. $Y=m$ с вер. 1, то
$F_{\frac{S_n}{n}}(z) \Rightarrow F_Y(z)$

Фиксируем произв. $\varepsilon>0$
и рассмотрим $P\left(m-\varepsilon \le \frac{S_n}{n} < m+\varepsilon\right)$

Если мы докажем, что $P\left(m-\varepsilon \le \frac{S_n}{n} < m+\varepsilon\right)\to 1$, то все доказано

$$P\left(m-\varepsilon \le \frac{S_n}{n} < m+\varepsilon\right) = F_{\frac{S_n}{n}}(m+\varepsilon) - F_{\frac{S_n}{n}}(m-\varepsilon)$$

А слабая сходимость означает сходимость левой части во всех точках непрерывности функции $F_Y(z)$
Но в т. $m+\varepsilon$ и $m-\varepsilon$ наша функция непр. и равняется в $m+\varepsilon$ единице, а в $m-\varepsilon$ нулю
$\Rightarrow F_{\frac{S_n}{n}}(m+\varepsilon) - F_{\frac{S_n}{n}}(m-\varepsilon) \to 1-0=1 \Rightarrow$ Все доказано

Центральная предельная теорема

Пусть $X_1, \dots, X_n$ - незав. один. распр. случ. величины и $\exists\, m = \mathbb{E}X_1$ и $\sigma^2 = DX_1$, но т.к. случ. величины одинаково распределены, то их мат. ожид. и дисперсии одинаковые

Тогда $\forall z \in \mathbb{R}$

$$P\Big(\underbrace{\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}}_{Z_n} < z\Big) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = P(Y < z), \text{ где } Y \sim N(0,1)$$

Замеч: Из ЦПТ можно доказать закон больших чисел

Док-во:

Аналогично, если доп. предположим $\exists\, \mathbb{E}X^2$, то получим такое соотношение:

$$f(t) = 1 + itm - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}X^2 + \bar{\bar{o}}(t^2),\ t \to 0 \quad (5)$$

Это уточнение формулы (4)

Доказывается так же, как (4), только здесь нужно использовать еще одно представление

$$e^{it} - 1 = i\int_0^t e^{iy} dy$$
$$\Downarrow$$
$$|e^{it} - 1| \le \min(2, |t|) \quad (1)$$

следующий член разложения e^{it} в 0

$$e^{it} - 1 - it = i\int_0^t (e^{iy} - 1) dy$$

$$|e^{it} - 1 - it| \le \min\left(2|t|, \frac{t^2}{2}\right) \quad (2)$$

$$Z_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sigma\sqrt{n}}, \text{ где } Y_i = X_i - m,\ \mathbb{E}Y_i = 0$$

$$DX_i = DY_i = \sigma^2$$

сдвиг на конст. не меняет дисп.

Если $f(t)$ - характ. функция Y_1, то

$$f_{Z_n}(t) = f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2\cancel{\sigma^2} n}\cancel{\sigma^2} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \bar{\bar{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

применили (5)

характ. функция станд. норм. закона $Y \sim N(0,1)$

$$f(t) = 1 + \underset{\uparrow}{itm} - \frac{t^2}{2}\underset{\uparrow}{\mathbb{E}X^2} + \bar{\bar{o}}(t^2)$$

мат. ожид. $\mathbb{E}Y_i = 0 \Rightarrow itm = 0$

второй момент $\mathbb{E}Y_i^2 = \sigma^2 = DX_i$

Тогда по обратной теореме о непр. соотв. док-во завершено